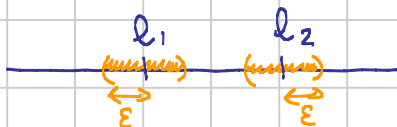


ANALISI MATEMATICA 1 - LEZIONE 014

Titolo nota

04/10/2012

Teorema di unicità del limite Una successione ha sempre uno solo dei comportamenti ①, ②, ③, ④. Inoltre, se è di tipo ①, allora il valore $l \in \mathbb{R}$ a cui tende è unico.

"Dim"  Supponiamo per assurdo che $a_n \rightarrow l_1$, $a_n \rightarrow l_2$, con $l_1 < l_2$

Prendo $\varepsilon > 0$ abbastanza piccolo in modo che gli intervalli di centro l_1 ed l_2 e raggio ε siano disgiunti. Per def. di limite dovrai avere

- $l_1 - \varepsilon \leq a_n \leq l_1 + \varepsilon$ definitivamente
- $l_2 - \varepsilon \leq a_n \leq l_2 + \varepsilon$ " "

Ma non è possibile che a_n stia in entrambi gli intervalli.

Teoremi stile "permanenza del segno" Sono enunciati del tipo

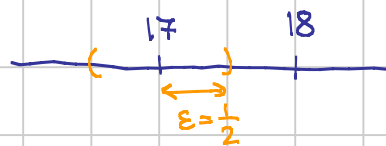
- se $a_n \rightarrow +\infty$, allora definitivamente $a_n > 0$, oppure defn. $a_n \geq 2012$
- se $a_n \rightarrow l > 0$, allora definitivamente $a_n > 0$
- se $a_n \rightarrow l < 0$, allora definitivamente $a_n < 0$

"Dim" Se $a_n \rightarrow 17$

per definizione di limite si ha che

$$17 - \varepsilon \leq a_n \leq 17 + \varepsilon \text{ definitiv.}$$

↓ implica che $a_n < 18$ perché $\varepsilon < 1$.



Esempi di limiti calcolati usando la definizione

① $a_n = n^2$. Intuitivamente $a_n \rightarrow +\infty$. Lo dimostro con la defn.

Devo verificare che $\forall M \in \mathbb{R}$ si ha che $a_n \geq M$ definitiv., cioè $n^2 \geq M$ definitiv. Ora

- se $M \leq 0$, allora $n^2 \geq M$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, quindi definitivamente
- se $M \geq 0$, allora $n^2 \geq M$ per ogni $n \geq \sqrt{M}$, cioè da un certo p.to in poi.

② $b_n = \sqrt{n}$. Intuitivamente $b_n \rightarrow +\infty$.

Devo verificare che $\forall M \in \mathbb{R}$ si ha che $\sqrt{n} \geq M$ definitivamente. Ora

- Se $M \leq 0$, allora $\sqrt{n} \geq M$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, quindi definitivamente.

$$(\sqrt{n} \geq 0 \geq M)$$

- Se $M \geq 0$, allora $\sqrt{n} \geq M$ per ogni $n \geq M^2$, quindi definitivamente.

Fatto generale

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^a = +\infty \text{ per ogni } a > 0 \rightarrow \text{TABELLINA}$$

Achtung! Si intende che l'esponente a è un numero reale FISSO, cioè NON DIPENDE DA n

③ $c_n = \frac{1}{n+4}$. Intuitivamente $c_n \rightarrow 0^+$.



Devo dimostrare che $\forall \varepsilon > 0$ si ha che $0 < c_n \leq \varepsilon$ definitivamente, cioè $0 < \frac{1}{n+4} \leq \varepsilon$ definitivamente.

Ora $\frac{1}{n+4} > 0$ è vera $\forall n \in \mathbb{N}$, quindi definitivamente.

Vediamo l'altra:

$$\frac{1}{n+4} \leq \varepsilon \rightsquigarrow \text{precorso} \rightsquigarrow n+4 \geq \frac{1}{\varepsilon}, \text{ cioè } n \geq \frac{1}{\varepsilon} - 4$$

Quindi anche la seconda disuguaglianza è vera definitivamente.

Osservazione Più ε è piccolo, più è grande $\frac{1}{\varepsilon} - 4$, più il definitivamente parte tardi.

Fatto generale

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^a = 0^+ \text{ per ogni } a < 0 \rightarrow \text{TABELLINA}$$

Brutalmente: n è in
realtà al denominatore.

Oss. La def. di limite non si usa praticamente MAI.

Strumenti per il calcolo dei limiti: permettono di by-passare la definit.

→ Teo. algebrici

→ Teo di confronto

RETTEA REALE ESTESA $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$

Utilità:

- se io dico $a_n \rightarrow l \in \bar{\mathbb{R}}$, è un modo per abbreviare la frase a_n è di tipo ①, ②, ③.
- in $\bar{\mathbb{R}}$ sono "quasi" definite le stesse operazioni algebriche che c'erano in $\mathbb{R}$. Esempi:

$$15 + (+\infty) = +\infty$$

$$(+\infty) + (+\infty) = +\infty$$

$$-7 \cdot (+\infty) = -\infty$$

$$15 + (-\infty) = -\infty$$

$$7 \cdot (-\infty) = -\infty$$

$$\frac{+\infty}{1000} = +\infty$$

Il quasi è dovuto a 2 tipi di casi delicati

1° tipo: le 7 forme $+\infty - \infty$, $0 \cdot (\pm\infty)$, $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$, $\frac{0}{0}$,
 0^0 , $1^{\pm\infty}$, $(\pm\infty)^0$.

2° tipo: quando si divide per 0.

Teoremi algebrici (Enunciato non precisissimo)

Siano a_n e b_n 2 successioni,

Supponiamo che $a_n \rightarrow l_1 \in \bar{\mathbb{R}}$ e $b_n \rightarrow l_2 \in \bar{\mathbb{R}}$.

Allora le successioni

$$a_n + b_n \rightarrow l_1 + l_2$$

$$a_n \cdot b_n \rightarrow l_1 \cdot l_2$$

$$a_n - b_n \rightarrow l_1 - l_2$$

$$\frac{a_n}{b_n} \rightarrow \frac{l_1}{l_2}$$

$$\frac{b_n}{a_n} \rightarrow \frac{l_2}{l_1}$$

$$c \cdot a_n \rightarrow c \cdot l_1 \text{ per ogni } c \neq 0$$

dove le operazioni vanno intese nel senso di $\bar{\mathbb{R}}$.

Non funziona
nei casi
problematici per
le operazioni
in $\bar{\mathbb{R}}$

Teo. confronto a 2 Siano a_n e b_n due successioni.

Supponiamo che $a_n \leq b_n$ definitivamente.

- Se $a_n \rightarrow +\infty$, allora anche $b_n \rightarrow +\infty$
- Se $b_n \rightarrow -\infty$, allora anche $a_n \rightarrow -\infty$

Teorema confronto a 3 (Teorema dei carabinieri) Supponiamo che

$a_n \leq b_n \leq c_n$ definitivamente

e supponiamo che

$a_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$ e $c_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$ (STESSO $l \in \mathbb{R}$)

Allora b_n è di tipo ① e $b_n \rightarrow l$ (stesso l).

Oss. Ogni altra implicazione è ABUSIVA.