

ANALISI MATEMATICA 1 - LEZIONE 013

Titolo nota

04/10/2012

TERMINOLOGIA Sia P_n una proprietà con un parametro $n \in \mathbb{N}$

- Si dice che P_n è vera FREQUENTEMENTE se è vera per infiniti valori di $n \in \mathbb{N}$
- Si dice che P_n è vera DEFINITIVAMENTE se è vera "da un certo p.to in poi" cioè se $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ b.c. P_n è vera $\forall n \geq n_0$.

Oss. Se P_n è vera definitivamente, allora P_n è vera frequentemente.
Non è detto che valga il viceversa,

Esempi

$n^2 - 2012 \geq 0$	Vera definitivamente, vera frequentemente
$3^n - 10.000 \leq 0$	Falsa " , falsa "
$(-2)^n \geq 7$	Vera frequentemente ($\forall n$ pari con $n \geq 3$)
	Falsa frequentemente ($\forall n$ dispari)

— 0 — 0 —

SUCCESIONI

- Definizione rigida. Una successione di numeri reali è una funzione $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$. In generale, invece di $f(n)$, si usa la notazione f_n .

Esempi

$a_n = 3n + 5$	$b_n = n^2 - 2012$	$c_n = \frac{3n+2}{n+4}$
----------------	--------------------	--------------------------

Oss. Secondo la def. rigida non potrei definire $a_n = \frac{1}{n}$ o $b_n = \sqrt{n-5}$ perchè le espressioni non hanno senso per alcuni valori $n \in \mathbb{N}$.

- Definizione più elastica. Si considera successione una qualunque funzione a valori reali che sia definita anche non per ogni $n \in \mathbb{N}$, ma almeno definitivamente (quindi è ammesso un numero FINITO di valori $n \in \mathbb{N}$ per cui non è definita)

Esempi

$$a_n = \frac{1}{n+5}$$

Ok senso rigido
senso elastico

$$b_n = \frac{1}{n-5}$$

Ok senso elast,
non senso rigido

$$c_n = \sqrt{n-2012}$$

Ok per $n \geq 2012$
↑ elastico, non
senso rigido

$$d_n = \sqrt{2012-n}$$

Non è una
successione (va
male 10 volte)

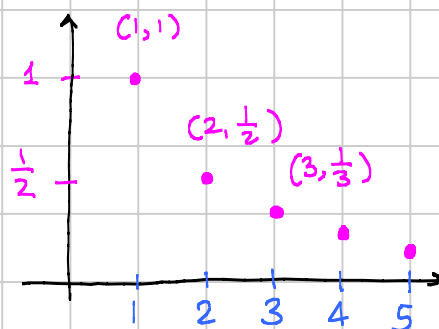
D'ora in poi le successioni si intendono in senso elastico.

RAPPRESENTAZIONI DI UNA SUCCESSIONE

Sia a_n una successione

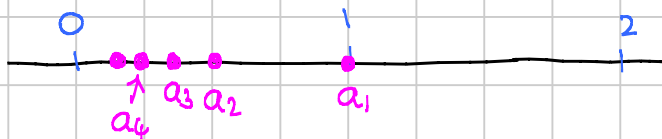
- ① Rappresentazione cartesiana nel piano: disegno il grafico della successione, cioè i pti (n, a_n) del piano cartesiano

$$a_n = \frac{1}{n}$$



- ② Rappresentazione su una retta: disegno su una retta i pti a_n

$$a_n = \frac{1}{n}$$



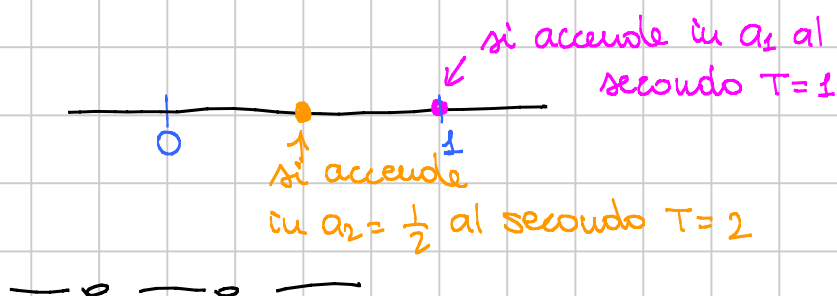
Vantaggio: sono nella retta invece che nel piano

Svantaggio: se uno non mette le etichette $a_1, a_2, a_3, \dots$ ai pti non è chiaro chi è a_1 , chi è a_2 , chi è $a_3, \dots$

Inoltre la successione può passare più volte dallo stesso punto, che quindi avrebbe più etichette.

- ③ Rappresentazione dinamica: pensare ad una retta, pensare allo scorrere del tempo e ad una lampadina che al secondo n si accende nel punto a_n e resta accesa esattamente un secondo

$$a_n = \frac{1}{n}$$



DEFINIZIONI DI LIMITE

Sia a_n una successione.

Sono possibili 4 tipi di comportamento

- ① $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = l \in \mathbb{R}$ $a_n \rightarrow l$ [Sono sinonimi]
(il limite per n che tende a $+\infty$ di a_n è l) (a_n tende ad l)

Achtung! Si può dire " a_n tende a 3" oppure "il limite di a_n è 3".
Non ha senso dire "il limite di a_n tende a 3".

- ② $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$ $a_n \rightarrow +\infty$

- ③ $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = -\infty$ $a_n \rightarrow -\infty$

- ④ $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$ NON ESISTE a_n è INDETERMINATA

Def. di ④ Nessuno dei precedenti

Def. di ② Si dice che $a_n \rightarrow +\infty$ se

$\forall M \in \mathbb{R}$ (anche enorme)

si ha che $a_n \geq M$ definitivamente

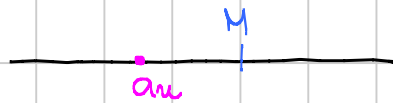
(più M è grande, più il superamento avverrà tardi)



Def. di ③ Si dice che $a_n \rightarrow -\infty$ se

$\forall M \in \mathbb{R}$ (anche enormemente negativo)

si ha che $a_n \leq M$ definitivamente



Def. di ① Si dice che $a_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$ se

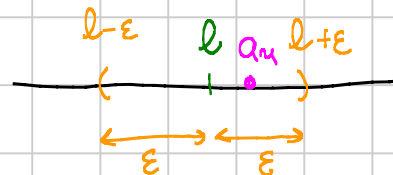
$\forall \varepsilon > 0$ (anche molto vicino a 0)

si ha che $l - \varepsilon \leq a_n \leq l + \varepsilon$ definitivamente.

Questo è equivalente a dire che $\forall \varepsilon > 0$

$$|a_n - l| \leq \varepsilon \text{ definitivamente}$$

distanza tra a_n ed l



Due varianti di ① Si dice che $a_n \rightarrow l^+$ (tende ad l da destra) se

$\forall \varepsilon > 0$ si ha che $l \boxed{<} a_n \leq l + \varepsilon$ definitivamente


Si dice che $a_n \rightarrow l^-$ (a_n tende ad l da sinistra) se

$\forall \varepsilon > 0$ si ha che $l - \varepsilon \leq a_n \boxed{<} l$


— o — o —

Esempi intuitivi

$$a_n = n^2 + 3$$

$$a_n \rightarrow +\infty$$

$$b_n = \frac{1}{n+5}$$

$$b_n \rightarrow 0, \text{ anzi } b_n \rightarrow 0^+$$

$$c_n = (-1)^n$$

c_n non ha limite, cioè è indeterminata

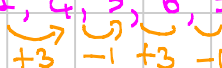
$$c_n = 1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots$$

— o — o —

leggende metropolitane

① Se $a_n \rightarrow +\infty$, vuol dire che a_n è crescente, almeno definitivamente?

NO! Basta prendere un fatto così:

2, 1, 4, 3, 6, 5, 8, 7, ... (3 passi avanti, uno indietro)


② Se $a_n \rightarrow 0$, vuol dire che $a_n \rightarrow 0^+$ oppure $a_n \rightarrow 0^-$?

NO! Basta prendere $a_n = \frac{1}{1}, -\frac{1}{2}, +\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, +\frac{1}{5}, -\frac{1}{6}, \dots$

0
—|—

③ Se $a_n \rightarrow 0^+$, vuol dire che a_n è decrescente, almeno definitivamente?

NO! Farsi l'esempio