

ANALISI MATEMATICA 1 - LEZIONE 012

Titolo nota

03/10/2012

Esempio 1 Calcolare il coefficiente di $x^3 y^{10}$ nello sviluppo di $(x+y)^{13}$

$$(x+y)^{13} = x^{13} + \dots + \boxed{?} x^3 y^{10} + \dots + y^{13}$$

La risposta è $\binom{13}{3}$ oppure $\binom{13}{10}$ che è lo stesso

$$\binom{13}{3} = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11}{3!} = \frac{13 \cdot \overset{2}{\cancel{12}} \cdot 11}{\cancel{6}} = 22 \cdot 11 = 242$$

$$\begin{array}{r} 22 \cdot \\ 13 \\ \hline 286 \end{array}$$

senza calcolare 13 righe del triangolo.

Esempio 2 Calcolare quanti sono gli anagrammi di BIOMEDICA.

Sono 9 lettere, quindi verrebbe da dire $9!$, ma ci sono 2 lettere I, quindi bisogna dividere per 2.

"Trucco": pensare che le I siano di 2 colori diversi, così ogni anagramma compare 2 volte (a seconda di quale I compare per prima)

Esempio 3 Anagrammi di TUTTO. Verrebbe da dire $5!$, ma ci sono 3 lettere T. Pensandole di 3 colori diversi, ogni anagramma compare in $3!$ versioni diverse, quindi divido per $3!$

$$\frac{5!}{3!} = \frac{120}{6} = 20$$

Esempio 4 Anagrammi di MATEMATICA

3A 2M 2T

$$\begin{array}{r} 10! \\ \hline 3! \cdot 2! \cdot 2! \\ \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \\ 3A \quad 2M \quad 2T \end{array}$$

Esempio 5 Anagrammi di MAMMA

$$\frac{5!}{3! \cdot 2!} = \binom{5}{3} = \text{si tratta di scegliere le 3 posizioni su 5 in cui scrivere M, oppure le 2 posizioni su 5 in cui scrivere A.}$$

$$\begin{array}{r} \uparrow \quad \uparrow \\ 3M \quad 2A \end{array} = \binom{5}{2}$$

— 0 — 0 — 0 — 0 —

Esempio 6 Funzioni pari / dispari / periodiche

$$f(x) = \sin(x^2)$$

PARI

$$f(x) = \sin^2 x$$

PARI

$$f(x) = \sin(x^3)$$

DISPARI

$$f(x) = \sin^3 x$$

DISPARI

$$f(x) = \cos(x^2)$$

PARI

$$f(x) = \cos^2 x$$

PARI

$$f(x) = \cos(x^3)$$

PARI

$$f(x) = \cos^3 x$$

PARI

Alcune verifiche!

$$\boxed{\sin(x^2)}$$

$$f(-x) = \sin(-x)^2 = \sin x^2 = f(x) \Rightarrow \text{PARI}$$

$$\boxed{\sin^2 x}$$

$$f(-x) = \sin^2(-x) = (-\sin x)^2 = \sin^2 x = f(x) \Rightarrow \text{PARI}$$

$$\boxed{\sin^3 x}$$

$$f(-x) = \sin^3(-x) = [\sin(-x)]^3 = [-\sin x]^3$$

$\uparrow$
 $\sin$ è dispari

$$= -\sin^3 x = -f(x)$$

$$\boxed{\cos^3 x}$$

$$f(-x) = \cos^3(-x) = [\cos(-x)]^3 = [\cos x]^3 = \cos^3 x = f(x) \Rightarrow \text{PARI}$$

$\uparrow$
 $\cos$ è pari

$$f(x) = \sin(\cos x)$$

PARI

$$f(x) = \sin(\sin x)$$

DISPARI

$$f(x) = \cos(\sin x)$$

PARI

$$f(x) = \cos(\cos x)$$

PARI

$$\boxed{\cos(\sin x)}$$

$$f(-x) = \cos(\sin(-x)) = \cos(-\sin x) = \cos(\sin x) = f(x) \Rightarrow \text{PARI}$$

$\uparrow$
 $\sin$ DISPARI

$\uparrow$
 $\cos$ PARI

$\Rightarrow$ PARI

$f(x) = 3^x$ non è né pari, né dispari. Basta osservare che

$$f(1) = 3 \quad f(-1) = \frac{1}{3} \quad \text{Quindi } f(1) \neq -f(-1) \quad f(1) \neq f(-1)$$

Esempio 7 $f(x) = \sin^2 x = [\sin x]^2$ è periodica?

Sì, un possibile periodo è 2π

$$f(x+2\pi) = [\sin(x+2\pi)]^2 = [\sin x]^2 = f(x)$$

$f(x) = \cos(\sin(7x))$ è periodica?

Sì, un possibile periodo è 2π

$$f(x+2\pi) = \cos(\sin(7(x+2\pi))) = \cos(\sin(7x+14\pi)) = \cos(\sin(7x)) = f(x)$$

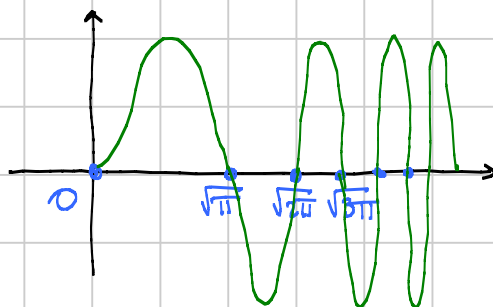
Esempio 8 $f(x) = \sin(x^2)$ è periodica? NO!

Dimostrarlo non è semplicissimo, ma "vederlo" sì. Come è fatto il grafico di $\sin(x^2)$? Dove si annulla?

$$\sin(x^2) = 0 \Leftrightarrow x^2 = k\pi \Leftrightarrow x = \sqrt{k\pi} \text{ con } k \in \mathbb{N}$$

Man mano che k cresce, gli zeri si "avvicinano" tra di loro.

L'effetto di x^2 è di rendere le oscillazioni sempre più veloci, il che impedisce la periodicità.

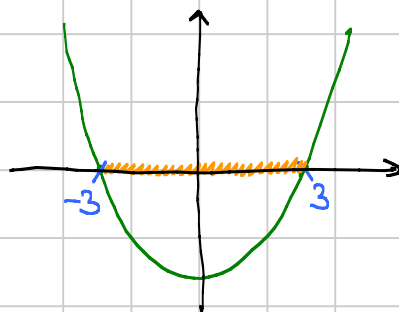


Esempio 9

$$\begin{aligned} \sup \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 9 \leq 0\} &= 3 && \text{PROPRIETÀ} \\ \sup \{x^2 - 9 : x \leq 0\} &= +\infty && \text{ELENCO} \end{aligned}$$

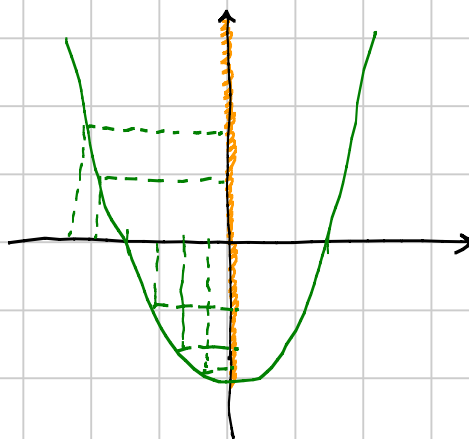
$\sup \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 9 \leq 0\} \leadsto$ risolvere la disequazione $\leadsto$ si ottiene $x \in [-3, 3]$, si prende il sup

↑
"MONDO x ": l'insieme in questione si rappresenta sull'asse x



$\sup \{x^2 - 9 : x \leq 0\} \leadsto$ "scrivi" tutti gli $x \leq 0$ e per ciascuno di questi calcola $x^2 - 9$. Così ottieni l'elenco che descrive l'insieme $\leadsto$ prendi il sup

↑
MONDO y : l'insieme in questione si rappresenta sull'asse y .



$$\inf \{x^2 - 9 : x \leq 0\} = -9$$

Esempio 10

$$\sup \{x^2 : x \in [-2, 1]\} = 4$$

$$\inf \{x^2 : x \in [-2, 1]\} = 0$$

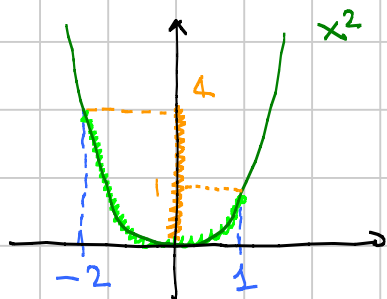
$$\inf \{|x-3| : x \in [0, 2]\} = 1$$

$$\sup \{\sin(x^2) : x \geq 77\} = 1$$

$$\sup = 3$$

$$\inf = -1$$

Sono tutti "MONDO y"



Quando x varia in $[-2, 1]$, ho che y varia da 0 a 4.

