

ANALISI MATEMATICA 1 - LEZIONE 011

Titolo nota

03/10/2012

Fattoriali, binomiali e loro significato combinatorio

FATTORIALE $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$

Definito ricorsivamente: (i) $0! = 1$ (per convenzione)

(ii) $(n+1)! = (n+1) \cdot n!$

Significato combinatorio:

→ modi di permutare n oggetti

→ numero dei possibili ordini di arrivo in una corsa con n concorrenti

→ numero di anagrammi di una parola con n lettere DIVERSE

"Dim": dati n concorrenti ho

- posso scegliere il 1° (vincitore) in n modi
- posso " " 2° in $(n-1)$ modi
- " " 3° " $(n-2)$ modi

e così via

Oss. Ad ogni vincitore posso accoppiare un qualunque 2°, un qualunque 3°, per cui si moltiplica.

BINOMIALE Siano dati due interi $0 \leq k \leq n$. Si pone

$$\binom{n}{k}$$

↑ binomiale "n su k"

$$= \frac{n!}{k! (n-k)!} = \frac{\overbrace{n(n-1) \dots (n-k+1)}^{k \text{ numeri da } n \text{ in giù}}}{k!}$$

↑ modo equivalente di scrivere la stessa cosa semplificando da $n-k$ in giù

Casi particolari $\binom{n}{0} = \frac{n!}{0! \cdot n!} = 1$

$$\binom{n}{n} = \frac{n!}{n! \cdot 0!} = 1$$

$$\binom{n}{1} = \frac{n!}{1! (n-1)!} = \frac{n \cancel{(n-1)!}}{1! \cancel{(n-1)!}} = n; \quad \binom{n}{2} = \frac{n!}{2! (n-2)!} = \frac{n(n-1) \cancel{(n-2)!}}{2! \cancel{(n-2)!}} = \frac{n(n-1)}{2}$$

Significato combinatorio Ho un gruppo di n persone. Voglio scegliere un sottogruppo costituito da k persone ($0 \leq k \leq n$)
In quanti modi posso farlo?

- Posso scegliere il 1° in n modi
 - Posso " " 2° in $(n-1)$ modi
 - " " 3° in $(n-2)$ modi
- e così via

- Posso scegliere il k -esimo in $(n-k+1)$

Quindi per ora ho a disposizione $n(n-1)(n-2) \dots (n-k+1)$ scelte.

Ora non è vero che tutte queste scelte portano a gruppi diversi. Infatti uno stesso gruppo di k persone può venir scelto in $k!$ modi diversi (cioè tanti quanti i possibili ordinamenti di k persone). Quindi devo dividere per $k!$:

$$\text{numero modi: } \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{k!} = \binom{n}{k}$$

Proprietà dei binomiali

① $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ (si tratta di scegliere tutti o nessuno)

② Simmetria: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

Algebricamente: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ $\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$

Scegliere i k da mettere nel gruppo è equivalente a scegliere gli $(n-k)$ da escludere dal gruppo

③ $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$

I modi di scegliere una persona tra n sono esattamente n

④ $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$ per ogni $0 \leq k \leq n$

Dim. algebrica $\binom{n+1}{k+1} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{(n+1) \cdot n!}{(k+1)!(n-k)!}$

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)(n-k-1)!} + \frac{n!}{(k+1)k!(n-k-1)!} \\ &= \frac{n!(k+1) + n!(n-k)}{(k+1)k!(n-k)(n-k-1)!} = \frac{n!(k+1+n-k)}{(k+1)k!(n-k)!} \end{aligned}$$

Interpretazione combinatoria Cosa vuol dire $\binom{n+1}{k+1}$?

Devo scegliere $(k+1)$ persone in un insieme di $(n+1)$ persone.

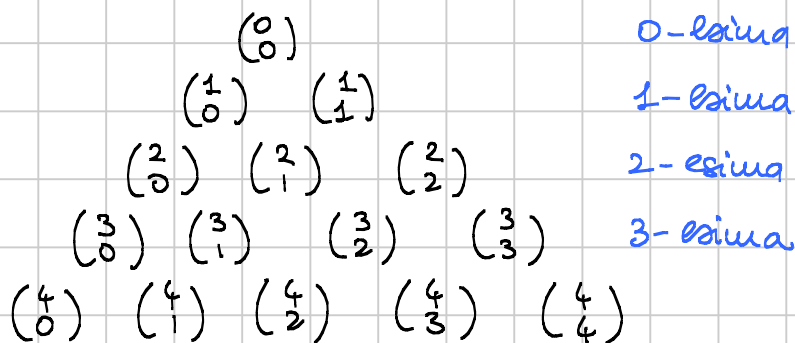
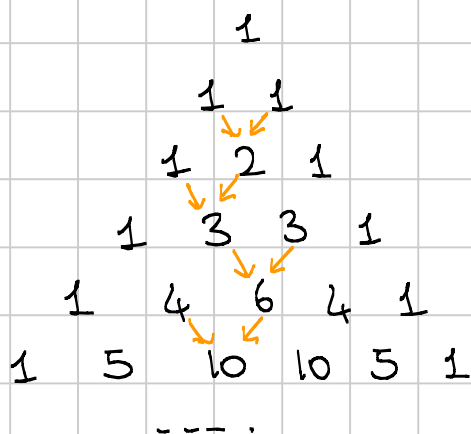
Scelgo una persona speciale $\hat{x}$ che chiamo 0 -esimo. Ci sono due modi di fare gruppi di $(k+1)$ persone!

1° modo: scelgo $\hat{x}$ + k persone tra le altre n . Questo lo posso fare in $\binom{n}{k}$ modi

2° modo: non scelgo $\hat{x}$, ma scelgo $(k+1)$ persone tra le restanti n .
Lo posso fare in $\binom{n}{k+1}$ modi.

Oss. Il fatto che $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ e la regola $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$ permettono di calcolare tutti i binomiali ricorsivamente.

TRIANGOLO DI TARTAGLIA (all'estero: DI PASCAL)



La riga n -esima del triangolo di Tartaglia contiene i binomiali del tipo $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \dots, \binom{n}{n}$

La regola della somma sui binomiali dice che ogni elemento della riga $(n+1)$ è la somma dei 2 elementi della riga n che gli stanno sopra.

Oss. Questo dice che i binomiali sono tutti INTERI.

Binomio di NEWTON Lo sviluppo di $(x+y)^n$ è del tipo

$$(x+y)^n = c_0 x^n + c_1 x^{n-1} y + c_2 x^{n-2} y^2 + \dots + c_{n-1} x y^{n-1} + c_n y^n$$

I numeri $c_0, c_1, c_2, \dots, c_n$ che compaiono come coeff. nello sviluppo sono i numeri della riga n del Triangolo di Tartaglia, cioè i binomiali.

In formule

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

Binomio di Newton

Esempi

$$(x+y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4 \quad 1-4-6-4-1$$
$$(x+y)^5 = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5 \quad 1-5-10-10-5-1$$

Significato combinatorio $(x+y)^5 = (x+y)(x+y)(x+y)(x+y)(x+y)$
Come faccio per ottenere termini del tipo x^3y^2 . Devo scegliere x in 3 parentesi e scegliere y in 2 parentesi. Quanti sono i modi di scegliere 3 parentesi su 5? Sono $\binom{5}{3}$, cioè il coeff. di x^3y^2 .

Fatto: somma degli elementi della riga n del triangolo di Tartaglia fa 2^n . Basta mettere $x=y=1$ nel binomio di Newton

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$$