

Setting: sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un sottoinsieme non vuoto

Def. Si dice che $M \in \mathbb{R}$ è un maggiorante di A se

$$a \leq M \quad \forall a \in A$$

Si dice che $m \in \mathbb{R}$ è un minorante di A se

$$a \geq m \quad \forall a \in A$$

Oss. • Dato $A \subseteq \mathbb{R}$, non è detto che esistano dei maggioranti (o dei minoranti). Ad esempio $\mathbb{N} = A$ non ammette maggioranti.
 • Se esiste un maggiorante M , questo di sicuro non è unico (tutti i numeri $\geq M$ sono a loro volta maggioranti). Idem per i minoranti.

Def. Si dice che $M \in \mathbb{R}$ è il massimo di A e si scrive $M = \max A$ se

(i) $a \leq M \quad \forall a \in A$ (cioè M è un maggiorante di A)

(ii) $M \in A$.

Si dice che $m \in \mathbb{R}$ è il minimo di A e si scrive $m = \min A$ se

(i) $a \geq m \quad \forall a \in A$ (cioè m è un minorante di A)

(ii) $m \in A$.

Def. Si dice che $A \subseteq \mathbb{R}$ è

- superiormente limitato se esiste almeno un maggiorante di A
- inferiormente limitato " " " " minorante " "
- limitato se è contemporaneamente superiormente limitato e inferiormente limitato.

Oss. • Massimo e minimo non sono obbligati ad esistere, nemmeno se A è limitato (ad esempio $A = (0,1)$ è lim., ma non ha max/min)
 • Se esistono, allora sono per forza unici

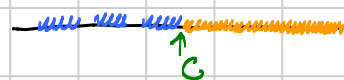
Estremo superiore ed estremo inferiore. Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ con $A \neq \emptyset$.

- Si dice che $\sup A = +\infty$ se non esistono maggioranti, cioè se A non è superiormente limitato
- Si dice che $\inf A = -\infty$ se... minoranti, ... A non è infer. lim.
- Si dice che $\sup A = L \in \mathbb{R}$ se A è superiormente limitato, dunque ammette dei maggioranti, ed L è il minimo tra tutti i maggioranti
- Si dice che $\inf A = l \in \mathbb{R}$, se A è limitato inferiormente e l è il massimo di tutti i minoranti.

Esempio $A = (0,1)$ questo è limitato superiormente (327 è un maggiorante). I maggioranti sono tutti i numeri $M \geq 1$. Il minimo dei maggioranti è 1, quindi $\sup A = 1$. Analogamente, i minoranti sono tutti i numeri $m \leq 0$, quindi $\inf A = 0$.

Domanda: $\sup$ e $\inf$ sono obbligati ad esistere? Sì!

Teorema Se A è limitato superiormente, allora il minimo dei maggioranti esiste per forza.



Dim.: Sia B l'insieme dei maggioranti di A (quindi $B \neq \emptyset$). Per definizione di maggiorante abbiamo che B sta tutto a dx di A . Ma allora per l'assioma di continuità esiste $c \in \mathbb{R}$ t.c.
(i) $a \leq c$ per ogni $a \in A$ (quindi c è un maggiorante)
(ii) $c \leq b$ per ogni $b \in B$ (quindi c è più piccolo degli altri maggioranti)

Quindi c è il minimo dei maggioranti, che quindi esiste ed è unico in quanto minimo.

Esercizio Enunciare e dimostrare l'analogo per l'estremo inferiore.

— o — o —

Caratterizzazione di $\inf$ e $\sup$

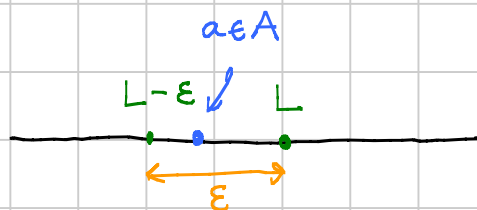
- ① Si ha che $\sup A = +\infty$ se
 $\forall M \in \mathbb{R} \exists a \in A$ b.c. $a \geq M$

(ogni $M \in \mathbb{R}$ non è un maggiorante, perché c'è qualcuno in A più grande di M)

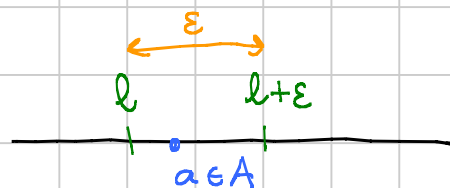


- ② Si ha che $\inf A = -\infty$ se
 $\forall M \in \mathbb{R} \exists a \in A$ b.c. $a \leq M$
↑ anche enormemente negativo

- ③ Si ha che $\sup A = L \in \mathbb{R}$ se
(i) $a \leq L \quad \forall a \in A$ (L è maggiorante)
(ii) $\forall \varepsilon > 0 \exists a \in A$ b.c. $a \geq L - \varepsilon$
↑ anche molto vicino a L



- ④ Si ha che $\inf A = l \in \mathbb{R}$ se
(i) $a \geq l \quad \forall a \in A$
(ii) $\forall \varepsilon > 0 \exists a \in A$ b.c. $a \leq l + \varepsilon$
— o — o —



Rapporti $\inf$ / $\sup$ / $\max$ / $\min$

- Se esiste $M = \max A$, allora è anche $M = \sup A$
- $\sup A$ non è obbligato ad appartenere ad A . Se ci appartiene, allora è anche il $\max A$.

Achtung! Se $A \neq \emptyset$, allora $\sup A$ e $\inf A$ esistono PER FORZA.