

ANALISI MATEMATICA 1 - LEZIONE 008

Titolo nota

29/09/2012

INSIEMI NUMERICI

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ = numeri naturali

$\mathbb{Z} = \{0, +1, -1, +2, -2, \dots\}$ = numeri interi
↑ zahlen

$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \right\}$ = numeri razionali
↑ quozienti

$\mathbb{R}$ = numeri reali = "quelli in corrispondenza con una retta"

$\mathbb{C}$ = numeri complessi

— o — o —

Oss. $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$, quindi $7 \in \mathbb{Q}$, $12 \in \mathbb{R}$
— o — o —

Proprietà dei numeri reali

→ algebriche

→ ordinamento

→ assioma di continuità

Proprietà algebriche Sui numeri reali sono definite 2 operazioni: somma e prodotto, con queste proprietà

(S1) $a+b = b+a$ per ogni $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$ COMMUTATIVA

(S2) $(a+b)+c = a+(b+c)$ " " $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}$ ASSOCIATIVA

(S3) $\exists 0 \in \mathbb{R}$ t.c. $a+0 = a$ per ogni $a \in \mathbb{R}$ ELEMENTO NEUTRO SOMMA

(S4) $\forall a \in \mathbb{R} \exists b \in \mathbb{R}$ t.c. $a+b = 0$.
Questo b si indica con $(-a)$ ESISTENZA OPPOSTO (inverso rispetto alla somma)

(P1) $a \cdot b = b \cdot a$ per ogni... COMMUTATIVA

(P2) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ " " ASSOCIATIVA

(P3) $\exists 1 \in \mathbb{R}$ t.c. $a \cdot 1 = a$ per ogni $a \in \mathbb{R}$ EL. NEUTRO RISP. PRODOTTO

(P4) $\forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \exists b \in \mathbb{R}$ t.c. $a \cdot b = 1$
Questo b si indica con $\frac{1}{a}$ ESISTENZA RECIPROCO (inverso rispetto al prodotto)

$$(D) \quad a(b+c) = ab+ac \quad \text{per ogni } a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R} \quad \text{DISTRIBUTIVA}$$

In quali altri sistemi numerici valgono

$$(D) \quad \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$$

$$(S1) \quad \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$$

$$(S2) \quad \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$$

$$(S3) \quad \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$$

$$(S4) \quad \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$$

$$(P1) \quad \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$$

$$(P2) \quad \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$$

$$(P3) \quad \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$$

$$(P4) \quad \mathbb{Q}, \mathbb{R}$$

Proprietà di ordinamento Dati due numeri reali x e y si ha sempre che $x \geq y$ oppure $y \geq x$. Le proprietà dell'ordinamento sono

$$(O1) \quad x \geq x \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}$$

RIFLESSIVA

$$(O2) \quad \text{se } x \geq y \text{ e } y \geq x, \text{ allora } x = y$$

ANTISIMMETRICA

$$(O3) \quad \text{se } x \geq y \text{ e } y \geq z, \text{ allora } x \geq z$$

TRANSITIVA

Ci sono poi delle proprietà che legano l'ordinamento alle operazioni algebriche. Sono

$$(OA1) \quad \text{Se } x \geq y, \text{ allora } x+z \geq y+z \quad \text{per ogni } z \in \mathbb{R}$$

$$(OA2) \quad \text{Se } x \geq y, \text{ allora } x \cdot z \geq y \cdot z \quad \text{per ogni } \boxed{z \geq 0}$$

Da queste si potrebbe dedurre l'ulteriore proprietà

$$(OA2') \quad \text{Se } x \geq y, \text{ allora } x \cdot z \leq y \cdot z \quad \text{per ogni } \boxed{z \leq 0}$$

Oss. Le proprietà di ordinamento valgono in $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ (non varranno in $\mathbb{C}$)

Esempi Risolvendo equazioni e disequazioni, si usano (inconsapevolmente) le proprietà algebriche e di ordinamento.

$$3x+2 \geq 7 \quad \text{Aggiungo a dx e sx } (-2) \text{ senza cambiare versi } (OA1)$$

$$(3x+2)+(-2) \geq 7+(-2)$$

$$= 3x + (2+(-2)) = 3x+0 = 3x$$

$$3x \geq 5$$

$\uparrow$
(S2)

$\uparrow$
(S4)

$\uparrow$
(S3)

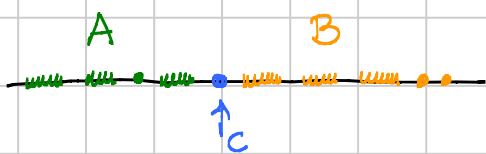
$$3x \cdot \frac{1}{3} \geq 5 \cdot \frac{1}{3}$$

Moltiplico a dx e sx per $\frac{1}{3}$ conservando i versi (OA2)

$$\rightarrow x \geq \frac{5}{3}$$

Fino ad ora nulla distingue $\mathbb{Q}$ da $\mathbb{R}$.

Assioma di continuità



Siano $A \subseteq \mathbb{R}$ e $B \subseteq \mathbb{R}$ due sottoinsiemi diversi da $\emptyset$. Supponiamo che A stia tutto a sinistra di B , cioè

$$a \leq b \quad \forall a \in A \quad \forall b \in B$$

L'assioma di continuità dice che esiste almeno un elemento $c \in \mathbb{R}$ tale che "sta in mezzo", cioè

$$c \geq a \quad \forall a \in A$$

$$c \leq b \quad \forall b \in B$$

- Oss.
- Il c non è obbligato ad essere unico (se c'è "un buco" tra A e B , tutti i c "nel buco" vanno bene)
 - Il c può appartenere ad A , a B , e anche ad entrambi (in questo caso è l'unico elemento separatore).

Fatto: l'assioma di continuità vale in $\mathbb{R}$, ma non vale in $\mathbb{Q}$, cioè in $\mathbb{Q}$ esistono degli insiemi A e B , con A a sx di B , che non ammettono un separatore $c \in \mathbb{Q}$.

Esempio

$$A = \{x \in \mathbb{Q} : x \geq 0 \text{ e } x^2 < 2\}$$
$$B = \{x \in \mathbb{Q} : x \geq 0 \text{ e } x^2 > 2\}$$

È semplice dimostrare che A sta tutto a sx di B .

Se ci fosse un $c \in \mathbb{Q}$ che sta tra A e B , allora ragionevolmente dovrebbe essere $c^2 = 2$, ma in $\mathbb{Q}$ non esiste un elemento il cui quadrato è 2. Quindi in $\mathbb{Q}$ non esiste il separatore.

Conclusione: sui numeri reali si definisce $\sqrt{2}$ come "il tizio che sta in mezzo tra A e B " che in $\mathbb{R}$ esiste.