

ANALISI MATEMATICA 1 - LEZIONE 007

Titolo nota

28/09/2012

Cos x e arccos x $f(x) = \cos x$

Vista come $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è pari e periodica di periodo minimo 2π

$$f(-x) = \cos(-x) = \cos x = f(x)$$

$$f(x+2\pi) = \cos(x+2\pi) = \cos x = f(x)$$

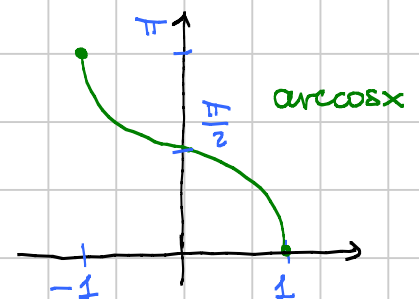
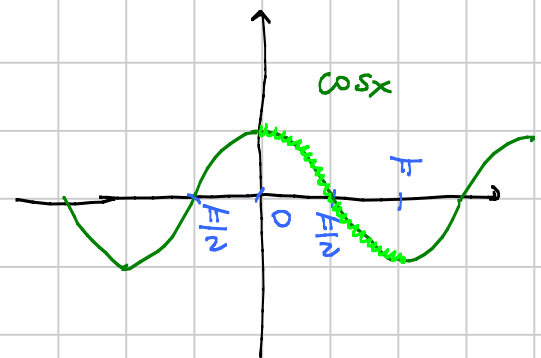
Non è né iniettiva, né surgettiva.

Vista come $f: [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$ è iniettiva, surgettiva, strettamente decrescente. Quindi ammette una funzione inversa

$$g: [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$$

che è $g(x) = \arccos x$. INPUT: valori $x \in [-1, 1]$

OUTPUT: valori in $[0, \pi]$

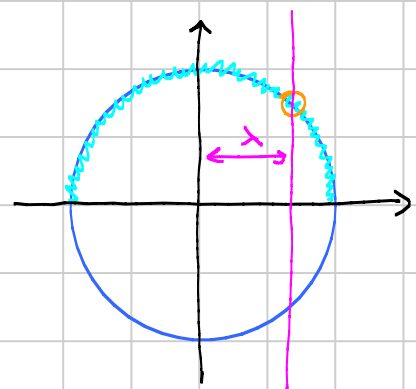


Nella circ. trigonometrica cerco $\arccos \lambda$.

Interseco la circ. con la retta $x = \lambda$. Se

$\lambda \in [-1, 1]$ ci sono intersezioni.

Quella buona è quella tra 0 e π , quindi quella nella parte alta.



— 0 — 0 —

Tangente ed arctan $f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

definita per ogni $x \in \mathbb{R}$ t.c. $\cos x \neq 0$,

cioè per ogni $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ (k intero)

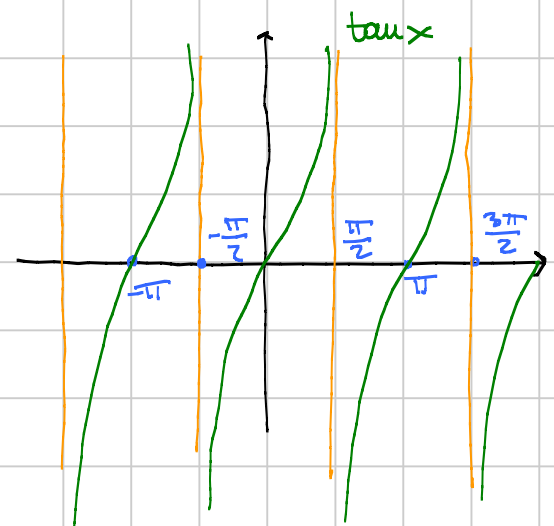
È dispari e periodica di periodo minimo π .

Vista come $f: (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$

è iniettiva, surgettiva, strett. crescente,

quindi ammette una funzione inversa

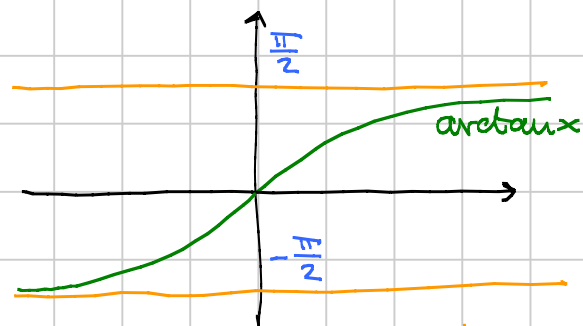
che è $g(x) = \arctan x$



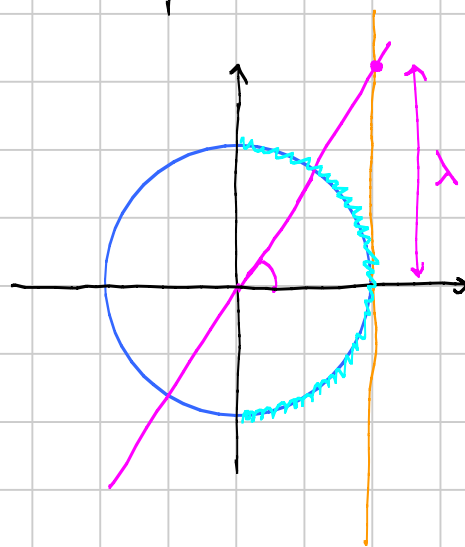
$$g: \mathbb{R} \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

↑ ↑
INPUT OUTPUT

$g(x) = \arctan x$, vista come
 $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è dispari,
 iniettiva, non surgettiva,
 strettamente crescente.

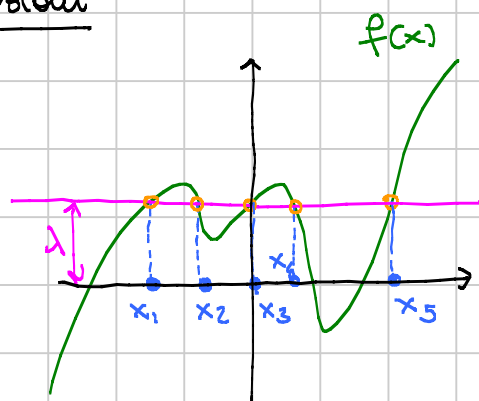


Interpretazione di $\arctan \lambda$ nella
 circ. trigonometrica. Devo trovare
 gli angoli la cui tangente è λ .
 Considero la retta che passa per $(0,0)$
 e per $(1, \lambda)$. Tale retta interseca la
 circ. trig. in 2 p.ti. Quello buono è
 quello in $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, cioè a dx

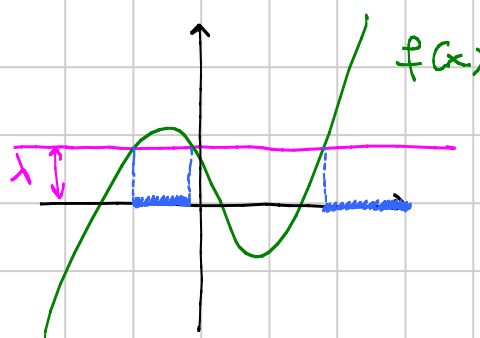


Interpretazione grafica di equazioni e disequazioni

- Cosa vuol dire risolvere $f(x) = \lambda$?
 Intersecare il grafico con la retta $y = \lambda$,
 ottenere un pd di punti e considerare
 le ascisse di tali punti



- Cosa vuol dire risolvere $f(x) > \lambda$?
 Cercare i p.ti x in cui il grafico sta
 sopra quota λ . La soluzione è
 sempre un sottoinsieme dell'asse x



GRANDI TENTAZIONI Situazione classica

$$\cancel{f}(2x+3) = \cancel{f}(5x+2) \quad 2x+3 = 5x+2, \quad 3x=1, \quad x=\frac{1}{3}$$

Quando si può fare ?

Se e solo se f è INIETTIVA

$$f(a_1) = f(a_2) \Leftrightarrow a_1 = a_2$$

Esempi

$$7^{2x+3} = 7^{5x+2} \Rightarrow 2x+3 = 5x+2 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$$

↑
ok perché 7^x è iniettiva

$$(2x+3)^{2013} = (5x+2)^{2013} \Rightarrow 2x+3 = 5x+2 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$$

↑
ok perché $f(x) = x^{2013}$ è iniettiva

$$\arctan(x^2) = \arctan x \Rightarrow x^2 = x \Rightarrow x=0 \text{ opp. } x=1$$

↑
ok perché $\arctan x$ è iniettiva

$$\sin(2x+3) = \sin(5x+2) \Rightarrow 2x+3 = 5x+2 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$$

↑
NO $f(x) = \sin x$ non è iniettiva

Con le disequazioni: $\cancel{f}(2x+3) > \cancel{f}(5x+2) \Rightarrow 2x+3 > 5x+2$

Si può fare se e solo se f è STRETTAMENTE CRESCENTE

Perché? Ipotesi: $f(a_1) > f(a_2)$ Tesi: $a_1 > a_2$

Cosa potrebbe succedere?

- $a_1 > a_2$, e mi va bene
- $a_1 = a_2$, ma non può essere perché avrei che $f(a_1) = f(a_2)$, il che è contro l'ipotesi
- $a_1 < a_2$, ma avrei che $f(a_1) < f(a_2)$, il che è ancora assurdo.

Fatto generale: $f(a_1) > f(a_2) \Leftrightarrow a_1 > a_2$ VERO se f è str. cresc.

Se invece f è strettamente decrescente, posso comunque fare l'eliminazione, ma devo girare i versi.

$f(a_1) > f(a_2) \Leftrightarrow a_1 < a_2$ VERO se f è str. dec.

[Ex. fare la dimostrazione in questo]

[Ex.2: vedere cosa si salva di queste implicazioni quando la monotonia è solo debole].

Esercizio

$$\arcsin(\sin 4) = 4 \quad \text{NO}$$

$$\arccos(\cos 4) = 4 \quad \text{NO}$$

$$\arcsin(\sin 3) = 3 \quad \text{NO}$$

$$\arccos(\cos 3) = 3 \quad \text{SI}$$

$$\quad \quad \quad \quad \quad 2 = 2 \quad \text{NO}$$

$$\quad \quad \quad \quad \quad 2 = 2 \quad \text{SI}$$

$$\quad \quad \quad \quad \quad 1 = 1 \quad \text{SI}$$

$$\quad \quad \quad \quad \quad 1 = 1 \quad \text{SI}$$

consulto dopo
video

$$\sin(\arcsin \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$$

$$\cos(\arccos \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$$

$$\sin(\arcsin 2) = 2 \quad \text{NO}$$

↑
no possibile

$$\cos(\arccos 2) = 2 \quad \text{NO}$$

↑
no possibile

[Capire i SI e NO : esercizio medio]

Esercizio Hard: capire cosa viene nei casi NO.