

ANALISI MATEMATICA 1 - LEZIONE 005

.....
Titolo nota

28/09/2012

FUNZIONI REALI

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$f: A \rightarrow \mathbb{R} \text{ dove } A \subseteq \mathbb{R}$$

insieme numeri reali

Grafico di $f = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} : y = f(x) \}$

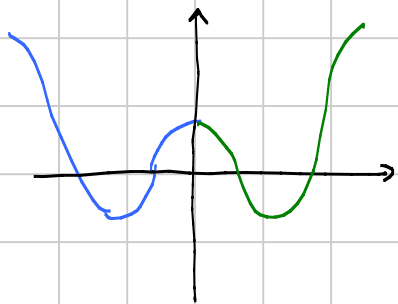
Proprietà di simmetria Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

- Si dice che f è **PARI** se $f(-x) = f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$
- " " **DISPARI** se $f(-x) = -f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$
- Si dice che f è **PERIODICA** se esiste un $T > 0$ tale che

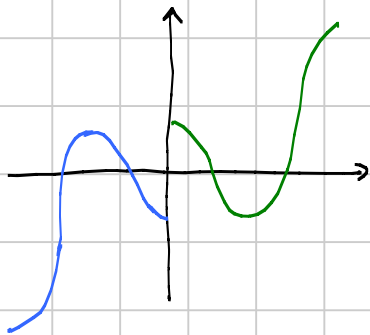
$$f(x+T) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Graficamente si ha che

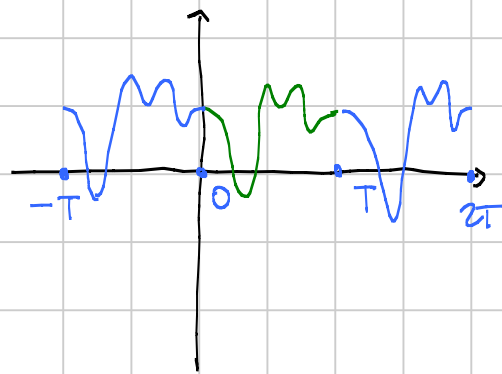
- [illegible]



PARI



DISPARI



Oss. Se una funzione è periodica e T è un suo periodo, allora anche $2T, 3T, \dots$ e in generale kT (con $k \geq 1$ intero) sono periodi della funzione.

Si dice minimo periodo il più piccolo T (se esiste) per cui si ha che $f(x+T) = f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

1	1	0	1
---	---	---	---

Proprietà di MONOTONIA Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Si dice che f è

• strettamente crescente se

$$x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

• debolmente crescente se

$$x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$

• strettamente decrescente se

$$x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

• debolmente decrescente se

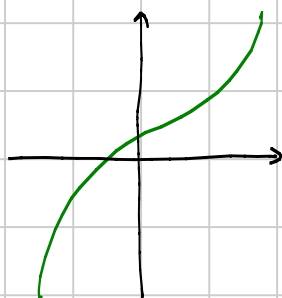
$$x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

Una funzione si dice MONOTONA se rientra in una delle 4 tipologie precedenti (strettamente monotona se...).

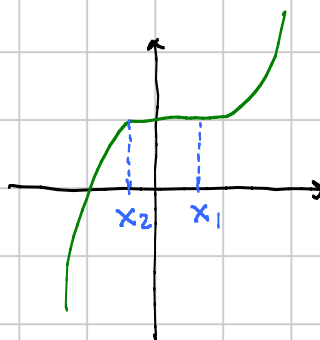
Achtung! Non utilizzare mai crescente o decrescente senza specificare debolmente o strettamente (per evitare confusione).

Achtung! f strettamente crescente $\Rightarrow f$ debolmente crescente
" decrescente $\Rightarrow$ " " decrescente

Esempi



strettamente crescente
debolmente crescente



debolmente crescente
NON strett. crescente



debolmente decr.
NON strett. decr.

Oss. Le uniche funzioni che sono contemporaneamente debol. cresc. e debol. decrescenti sono le funzioni costanti.



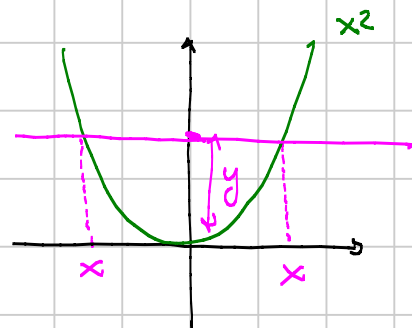
debol. cresc.

debol. decrescent.

PARENTESI Iniettività, surgettività, grafico

$f(x)$ è surgettiva se $\forall y \in \mathbb{R} \exists x \in \mathbb{R} \text{ t.c. } y = f(x)$

Detto altrimenti: una funzione è surgettiva se e solo se il grafico interseca ogni retta parallela all'asse x .



Una funzione è iniettiva se e solo se

ogni retta parallela all'asse x incontra il grafico al più una volta.

Riassumendo Per funzioni $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ si ha che

- f è INIETTIVA se e solo se per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ l'equazione $f(x) = \lambda$

ha 0 o 1 soluzione, cioè se e solo se per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ il grafico di $f(x)$ incontra la retta $y = \lambda$ 0 o 1 volta.

- f è SURGETTIVA se e solo se per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ l'equazione $f(x) = \lambda$

ha 1 o più soluzioni, cioè se e solo se per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ il grafico di $f(x)$ incontra la retta $y = \lambda$ 1 o più volte

- f è BIGETTIVA ... esattamente 1 soluzione ... esatt. 1 intersezione.

Osservazione Se una funzione è PARI, di sicuro non è iniettiva
" " " " PERIODICA " " "

Oss. 2 Se una funzione è STRETTAMENTE CRESCENTE, allora di sicuro è iniettiva

(se $a_1 \neq a_2$, allora diciamo $a_1 < a_2$ e quindi $f(a_1) < f(a_2)$, quindi $f(a_1) \neq f(a_2)$)

Stessa cosa se la funzione è STRETTAMENTE DECRESCENTE

Quindi

STRETTAMENTE MONOTONA $\Rightarrow$ INIETTIVA

PRESENTAZIONE FUNZIONI E FUNZIONI INVERSE ELEMENTARI

POTENZE $f(x) = x^2$

Vista come $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è pari

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$$

È iniettiva? È surgettiva?

NO

NO



Ora cambio l'insieme di partenza e arrivo, cioè considero

$$f(x) = x^2 \text{ come } f: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$

Così considero solo il tratto di grafico contenuto nel 1° quadrante.

Ora f è iniettiva e surgettiva.

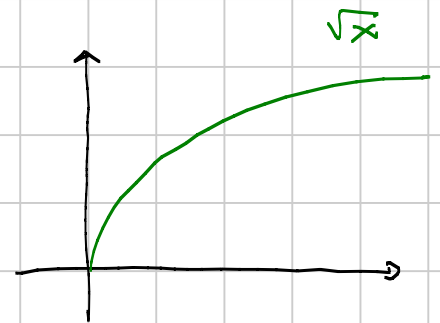
Essendo iniettiva e surgettiva, ammette una funzione inversa

$$g: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$

Questa funzione è $g(x) = \sqrt{x}$

Quindi $\sqrt{x}$

- prende in INPUT numeri reali ≥ 0
- fornisce in OUTPUT " " ≥ 0



Osservazione Il grafico di una funzione e della sua inversa sono l'uno il simmetrico dell'altro risp. alla bisettrice $y=x$

