

Esempio 1 Se A è un insieme e $|A| = n$, allora $|\mathcal{P}(A)| = 2^n$

Dim. per induzione **PASSO BASE** $n=0$. Se $|A|=0$, allora $A = \emptyset$,
ma allora $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$, quindi $|\mathcal{P}(A)| = 1$.

Caso $n=1$ Se $|A|=1$, allora $A = \{a_1\}$, ma allora
 $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a_1\}\}$, quindi $|\mathcal{P}(A)| = 2 = 2^1 = \text{Ok}$

PASSO INDUTTIVO Ipotesi: se $|A| = n$, allora $|\mathcal{P}(A)| = 2^n$
Tesi: se $|A| = n+1$, allora $|\mathcal{P}(A)| = 2^{n+1}$

Dim. passo induttivo Considero un insieme A con $n+1$ elementi

$$A = \{a_1, \dots, a_n, a_{n+1}\}$$

I sottoinsiemi di A sono di 2 tipi

- * sottoinsiemi che non contengono a_{n+1} . Questi sono tanti quanti i sottoinsiemi di $\{a_1, \dots, a_n\}$, e questi per ipotesi sono 2^n
- * sottoinsiemi che contengono a_{n+1} . Questi si ottengono aggiungendo a_{n+1} ad un qualunque sottoinsieme di $\{a_1, \dots, a_n\}$, quindi sono a loro volta 2^n .

In totale i sottoinsiemi di A sono $2^n + 2^n = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$

Esempio 2 Dimostrare che $2^n \geq n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$

Dim. per induzione **PASSO BASE** $n=0$: $2^0 \geq 0$ $1 \geq 0$ Ok

PASSO INDUTTIVO Ipotesi: $2^n \geq n$ Tesi: $2^{n+1} \geq n+1$

Dim. passo induttivo; punto a costruire una catena di disuguaglianze
 $A_1 \geq A_2 \geq \dots \geq A_k$

in modo da dedurre che $A_1 \geq A_k$ (voglio che $A_1 = 2^{n+1}$ e $A_k = n+1$)

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \geq 2 \cdot n \geq n+1$$

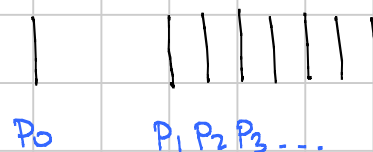
$\uparrow$ Hp. 2 $\uparrow$
 percorso speranza

Se la speranza è vera, allora 1° termine $\geq$ ultimo, che è la tesi che volevo dimostrare.

Ora la speranza è vera se e solo se $2n \geq n+1$, cioè se e solo se $n \geq 1$. Occhio: la speranza è vera, quindi ho dim. il passo induttivo, solo per $n \geq 1$.

Pensando al dominio, la situazione è così:

il meccanismo di caduta funziona (o l'ho dimostrato) solo per $n \geq 1$.



Per completare la dimostrazione devo fare "a mano" il caso $n=1$

PASSO BASE $n=1$ $2^1 \geq 1$ $2 \geq 1$ ok.

— o — o —

Esempio 3 DISUGUAGLIANZA DI BERNOULLI

$$(1+x)^n \geq 1+nx$$

$$\forall n \in \mathbb{N}$$

$$\forall x \geq -1$$

vedi oss. dopo dim.

Dim. per induzione

PASSO BASE

$$n=0 : (1+x)^0 \geq 1+0 \cdot x$$

$$1 \geq 1 \quad \text{ok}$$

PASSO INDUTTIVO

Ipotesi: $(1+x)^n \geq 1+nx$

Tesi: $(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$

Dim. passo induttivo: tutto la catena di uguaglianze e disuguaglianze

$$(1+x)^{n+1} \stackrel{\text{precorso}}{=} (1+x) \cdot (1+x)^n \stackrel{\text{Hp. } (1+x)}{\geq} (1+x)(1+nx)$$

$$= 1+nx+x+nx^2$$

$$= 1+(n+1)x + \boxed{nx^2}$$

$$\geq 1+(n+1)x$$

≥ 0 , quindi se lo tolgo la somma può solo calare

Confrontando 1° e ultimo ho la tesi.

Oss. Va bene per ogni x la dimostrazione? Per $n=2$ e $x=-100$ la disuguaglianza è falsa...

Per ipotesi avevo che $(1+x)^n \geq 1+nx$, ma ho usato che

$$(1+x)(1+x)^n \geq (1+nx)(1+x)$$

cioè ho moltiplicato per $(1+x)$ conservando i versi.

Questo si può fare $\Leftrightarrow 1+x \geq 0$, cioè $\Leftrightarrow x \geq -1$

— 0 — 0 —

Oss. Applicando Bernoulli con $x=1$ si ha che

$$(1+x)^n \geq 1+nx$$

$2^n \geq 1+n \geq n$, quindi $2^n \geq n$ che è l'esempio precedente.

— 0 — 0 —

Esempio 4 Determinare per quali valori di $n \in \mathbb{N}$ si ha che $n! \geq 2^n$
($n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$ con la convenzione che $0! = 1$)

Esperimenti:	$0! \stackrel{?}{\geq} 2^0$	$1 \geq 1$	OK
	$1! \stackrel{?}{\geq} 2^1$	$1 \geq 2$	NO
	$2! \geq 2^2$	$2 \geq 4$	NO
	$3! \geq 2^3$	$1 \cdot 2 \cdot 3 \geq 8$	$6 \geq 8$ NO
	$4! \geq 2^4$	$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \geq 16$	$24 \geq 16$ SI
	$5! \geq 2^5$	$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \geq 32$	$120 \geq 32$ SI

Idea: $n! \geq 2^n$ per $n=0$ e poi per $n \geq 4$

Dim. per induzione PASSO BASE $n=4$ fatto sopra

PASSO INDUTTIVO Ipotesi $n! \geq 2^n$ Tesi: $(n+1)! \geq 2^{n+1}$

Dim. passo induttivo: catena di uguaglianze e disuguaglianze
def. fattoriale

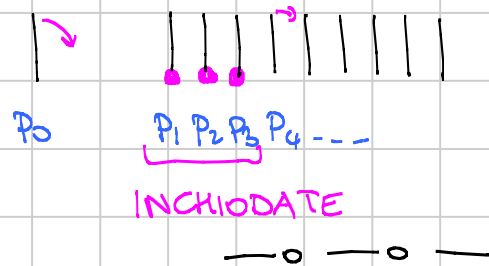
$$(n+1)! \stackrel{\text{def. fattoriale}}{=} (n+1) \cdot n! \geq (n+1) \cdot 2^n \stackrel{\text{ipotesi}}{\geq} 2^{n+1}$$

$\uparrow$ Hp. (n+1) $\uparrow$ speranza

Controllo la speranza: $(n+1) \cdot 2^n \stackrel{?}{\geq} 2^{n+1}$
 $(n+1) \cdot \cancel{2^n} \geq 2 \cdot \cancel{2^n} \quad (2^n > 0)$
 $n+1 \geq 2$
 $n \geq 1$

Quindi il passo induttivo è dimostrato per ogni $n \geq 1$.

Le tessere del domino sono messe così:



La caduta sarebbe possibile per $n \geq 1$, ma solo P_4 cade innescando il meccanismo.

Def. ricorsiva di fattoriale Si può definire $n!$ per induzione ponendo

(i) $0! = 1$

(ii) $(n+1)! = (n+1) \cdot n!$

Cioè so calcolare $(n+1)!$ nel momento in cui so calcolare $n!$

Esempio 5 Trovare per quali $n \in \mathbb{N}$ si ha che $6^n \geq 4^n + 5^n$

Esperimenti $n=0$ NO, $n=1$ NO, $n=2$ NO, $n=3$ SI

Idea: Vero per ogni $n \geq 3$

Induzione ..., [Esercizio]

Passo induttivo Ipotesi: $6^n \geq 4^n + 5^n$
 Tesi: $6^{n+1} \geq 4^{n+1} + 5^{n+1}$

Dim passo induttivo:

$$\begin{aligned} 6^{n+1} &= 6 \cdot 6^n \geq 6 \cdot (4^n + 5^n) = 6 \cdot 4^n + 6 \cdot 5^n \\ &\geq 4 \cdot 4^n + 5 \cdot 5^n \\ &= 4^{n+1} + 5^{n+1} \end{aligned}$$

[Giustificare i passaggi!],