

PRINCIPIO DI INDUZIONE

$\mathbb{N}$ = insieme dei numeri naturali = $\{\boxed{0}, 1, 2, 3, 4, \dots\}$


P_n = affermazione che contiene al suo interno un parametro $n \in \mathbb{N}$ e che a seconda dei valori di n può essere vera o falsa.

Esempi

$$n^2 = n + 6 \quad (\text{Vera per } n=3, \text{ falsa per } n=4, \dots)$$

$$2^n \geq n + 6 \quad (\text{Vera per } n=4, \text{ falsa per } n=3, \dots)$$

Se un insieme A ha n elementi, allora $\mathcal{P}(A)$ ha 2^n elementi

Obiettivo: stabilire per quali valori $n \in \mathbb{N}$ si ha che P_n è vera.

Principio di induzione Sia P_n come sopra.

Supponiamo che:

(i) P_0 è vera (sostituendo $n=0$ ottengo un'aff. vera)

(ii) $\forall n \in \mathbb{N}$, se P_n è vera, allora anche P_{n+1} è vera. (se è vera una, è vera la successiva)

Allora P_n è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$.

"Dim." P_0 è vera per il p.to (i)

Uso il p.to (ii) con $n=0$. Essendo P_0 vera, sarà vera pure P_1

" " " " $n=1$. " P_1 " " " P_2

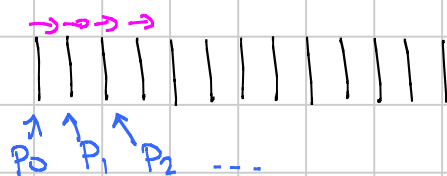
" " " $n=2$ " P_2 " " P_3

e così via...

Nomenclatura Il p.to (i) si dice PASSO BASE

Il p.to (ii) si dice PASSO INDUTTIVO, ed è quello che permette il passaggio da n ad $n+1$.

Bruttalmente: l'induzione è come la caduta delle tessere del domino



Il p.to (i) è come dire che P_0 cade

Il p.to (ii) è come dire che c'è il meccanismo di caduta, cioè SE cade una tessera, allora cade la successiva.

Operativamente Voglio dimostrare che P_n è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Allora dimostro 2 cose:

* PASSO BASE: sostituisco $n=0$ e vedo se P_0 è vera

* PASSO INDUTTIVO: assumo per ipotesi che P_n sia vera, ed usando questa info. dim. che anche P_{n+1} è vera.

Se mi riescono questi due p.ti, ho finito, cioè P_n è vera $\forall n \in \mathbb{N}$.

Variaute Supponiamo che

(i) P_{77} è vera,

(ii) Se P_n è vera, allora P_{n+1} è vera.

Allora P_n è vera per ogni $n \geq 77$ (per gli n precedenti non posso dire nulla, dovrei provare "a mano").

Esempio 1 Dimostrare che $0 + 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

Notazione: $0 + 1 + 2 + \dots + n = \sum_{i=0}^n i$
↑ sommatoria di i per i che va da 0 a n .

Dim. per induzione

PASSO BASE Sostituisco $n=0$. Viene $0 = \frac{0 \cdot 1}{2} = 0$ OK

PASSO INDUTTIVO Ipotesi: $0 + 1 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ ← con $n+1$ al posto di n
Tesi: $0 + 1 + \dots + n + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

Dim. passo induttivo: $0 + 1 + \dots + n + (n+1) = \underbrace{\frac{n(n+1)}{2}}_{\text{uso ipotesi}} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$
← somma delle frazioni

Uguagliando primo e ultimo ho la tesi.

Oss. Ho usato una catena di uguaglianze:

$$A_1 = A_2 = A_3 = \dots = A_k$$

In questi casi $A_1 = A_k$.

Oss.2 L'induzione insegna a dimostrare una data formula, ma non insegna a ricavare quella formula.

In questo esempio c'è il trucco di GAUSS:

$$\boxed{0} + \boxed{1} + \boxed{2} + \dots + n = S$$

$$n + (n-1) + (n-2) + \dots + 0 = S$$

$$\underbrace{n + n + n + \dots + n}_{n(n+1)} = 2S$$

$$2S = n(n+1) \Rightarrow S = \frac{n(n+1)}{2}$$

— 0 — 0 —

Esempio 2 $0^2 + 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$$\sum_{i=0}^n i^2$$

Dim. PASSO BASE $n=0$: $0^2 = \frac{0 \cdot 1 \cdot 1}{6} = 0$ OK

PASSO INDUTTIVO Ipotesi: $0^2 + 1^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$$\text{tesi: } 0^2 + 1^2 + \dots + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

Dim. passaggio induttivo: cerco di fare una catena di uguaglianze

$$\underbrace{0^2 + 1^2 + \dots + n^2}_{\text{conosco}} + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$$

↑
Uso Hp

Tutte le uguaglianze dopo la 1^a sono

$$= \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} = \frac{(n+1)[n(2n+1) + 6(n+1)]}{6}$$

PRECORSO.

$$= \frac{(n+1)(2n^2 + n + 6n + 6)}{6} = \frac{(n+1)(2n^2 + 7n + 6)}{6}$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

Esempio 3

$$0^3 + 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$$

[Esercizio]

Esempio 4

$$1 + a + a^2 + \dots + a^n = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}$$

$$\sum_{i=0}^n a^i \quad (\text{se } a \neq 1)$$

Dim. per induzione

PASSO BASE

$$n=0 : 1 = \frac{a-1}{a-1} = 1 \quad (\text{se } a \neq 1)$$

PASSO INDUTTIVO Ipotesi: $1 + a + \dots + a^n = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}$

$$\text{tesi: } 1 + a + \dots + a^{n+1} = \frac{a^{n+2} - 1}{a - 1}$$

Dim. passo induttivo: catena di uguaglianze

$$\underbrace{1 + a + \dots + a^n}_{\text{conosco}} + a^{n+1} = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1} + a^{n+1} \stackrel{\text{Uso Hp}}{=} \frac{a^{n+1} - 1 + a^{n+2} - a^{n+1}}{a - 1} \stackrel{\text{Racorso}}{=} \frac{a^{n+2} - 1}{a - 1}$$

Uguagliando 1° e ultimo ho la tesi

Oss. Questa formula raccoglie le classiche scomposizioni

$$n=2 \quad 1 + a + a^2 = \frac{a^3 - 1}{a - 1} \quad (a^3 - 1) = (a - 1)(1 + a + a^2)$$

$$n=3 \quad 1 + a + a^2 + a^3 = \frac{a^4 - 1}{a - 1} \quad a^4 - 1 = (a - 1)(1 + a + a^2 + a^3)$$

$$n=6 \quad \rightarrow \quad a^7 - 1 = (a - 1)(a^6 + a^5 + a^4 + a^3 + a^2 + a + 1).$$

— o — o —