

ANALISI MATEMATICA - LEZIONE 002

Titolo nota

26/09/2012

FUNZIONI Cos'è una funzione? Non ve lo dico.

Operativamente una funzione sono 3 cose:

- 1) Un insieme di partenza A ,
- 2) " " " arrivo B ,
- 3) Una serie di regole che ad ogni elemento $a \in A$ associa un unico elemento $f(a) \in B$

Come si presenta:

$$f: A \rightarrow B$$

$\uparrow$ insieme di partenza $\uparrow$ insieme arrivo

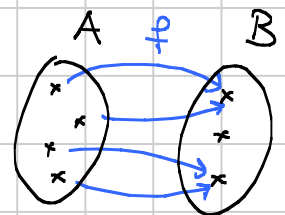


Grafico di una funzione

Grafico di $f: \{(a,b) \in A \times B : b = f(a)\}$

Oss. Il grafico di una funzione è un sottoinsieme del prodotto Cart. $A \times B$.

Funzioni INIETTIVE e SURGETTIVE Sia $f: A \rightarrow B$ una funzione

- Si dice che f è INIETTIVA se manda elementi distinti di A in elementi distinti di B . "Formalmente"

$$a_1 \in A, a_2 \in A, a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$$

oppure, che è lo stesso, se

$$f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$$

Brutalmente: frecce che partono da pti diversi arrivano in pti diversi

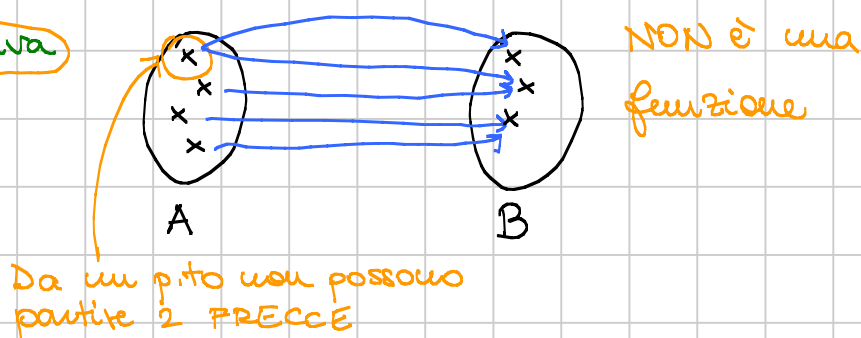
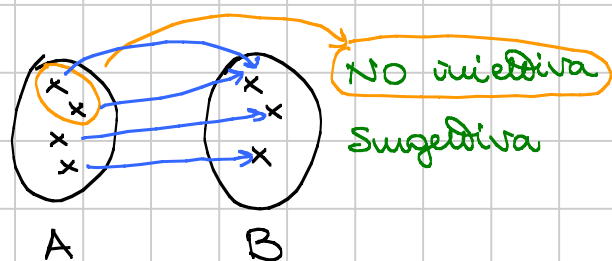
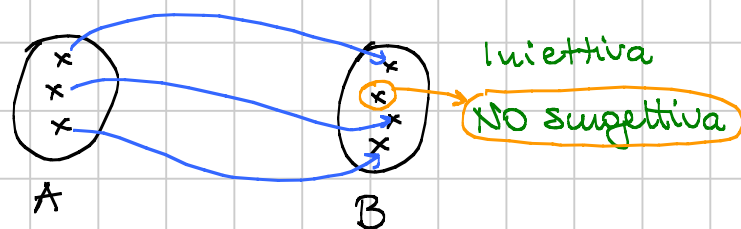
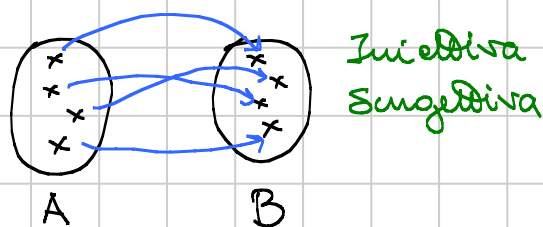
- Si dice che f è SURGETTIVA se ogni elemento di B è immagine di almeno un elemento di A . Formalmente

$$\forall b \in B \quad \exists a \in A \quad : \quad b = f(a)$$

$\uparrow$ per ogni $\uparrow$ esiste almeno un $\uparrow$ tale che

Brutalmente: ogni p.to in arrivo è raggiunto da almeno una freccia.

Esempi



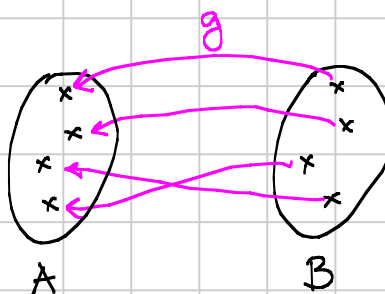
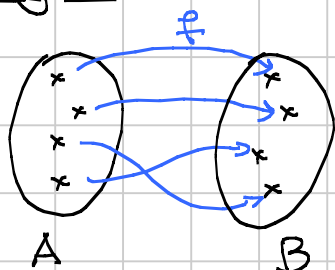
- Si dice che f è BIGETTIVA se è sia INIETTIVA sia SURGETTIVA

Teorema / definizione Una funzione $f: A \rightarrow B$ è bigettiva se e solo se è invertibile, cioè se e solo se esiste una funzione $g: B \rightarrow A$ tale che

$$\begin{aligned} g(f(a)) &= a & \forall a \in A \\ f(g(b)) &= b & \forall b \in B. \end{aligned}$$

Brutalmente: la funzione g , detta inversa di f , è la funzione che "torna indietro" rispetto alle frecce di f .

Disegno:



$g(f(a)) = a \quad \forall a \in A$: parto da a , seguo f , poi seguo g , e torno in a
 $f(g(b)) = b \quad \forall b \in B$: parto da B , seguo g , poi seguo f , e torno in b

È sempre garantito che esiste g ? NO!

Posso farlo se e solo se in ogni p.to di B arriva una ed una sola freccia in partenza di A .

Questo accade se e solo se f è iniettiva e surgettiva.

Altra interpretazione:

- f è iniettiva se e solo se in ogni $b \in B$ arrivano 0 o 1 freccia
- f è surgettiva " " " " 1 o più frecce

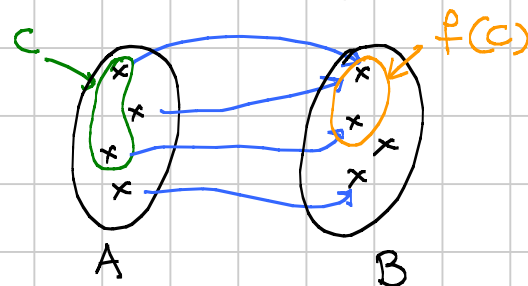
Quindi

f è bigettiva " " " 1 e 1 sola freccia,
che dunque posso invertire.

IMMAGINE E CONTROIMMAGINE Sia $f: A \rightarrow B$ una funzione.

Sia $C \subseteq A$ un sottoinsieme.

Si dice immagine di C l'insieme dei p.ti di B raggiunti da frecce che partono da elementi di C !



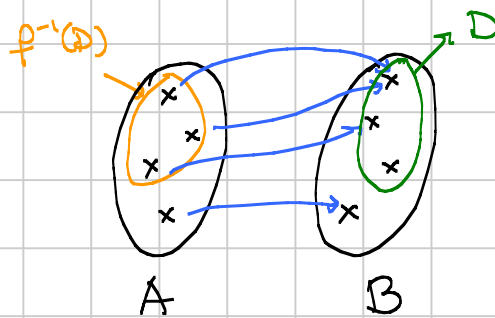
$$f(C) = \{ f(a) : a \in C \} \subseteq B$$

In particolare si dice immagine di A l'insieme

$$f(A) = \{ f(a) : a \in A \} = \text{tutti gli el. di } B \text{ raggiunti}$$

PER ELENCO

Sia $D \subseteq B$ un sottoinsieme. Si dice controimmagine di D l'insieme di tutti i p.ti di A da cui partono frecce che arrivano in D . Formalmente



$$f^{-1}(D) = \{ a \in A : f(a) \in D \} \leftarrow \text{PER PROPRIETÀ}$$

controimmagine di D

Oss.1 f è surgettiva se e solo se $f(A) = B$, cioè ogni p.to di B è raggiunto da frecce

Oss.2 Per definire $f^{-1}(D)$ non serve che f sia invertibile