

A.A. 2012/2013
Corso di Analisi Matematica I
Stampato integrale delle lezioni
Volume 2

Massimo Gobbino

Indice

Lezione 060: Introduzione alle successioni per ricorrenza: nomenclatura e primo esempio di piano con la monotonia	6
Lezione 061: Ulteriori esempi di successioni per ricorrenza studiati mediante piani con la monotonia.	10
Lezione 062: Interpretazione grafica delle successioni per ricorrenza. Esempi studiati mediante la distanza dal presunto limite.	14
Lezione 063: Successioni per ricorrenza spiraleggianti: studio mediante la distanza dal presunto limite	18
Lezione 064: Successioni per ricorrenza spiraleggianti: studio mediante le sottosuccessioni dei pari e dei dispari	22
Lezione 065: Ulteriori esempi di successioni per ricorrenza autonome	26
Lezione 066: Ulteriori esempi di successioni per ricorrenza autonome	30
Lezione 067: Successioni per ricorrenza non autonome: piani con la monotonia, con il rapporto, con limitatezza e carabinieri	33
Lezione 068: Ulteriori esempi di successioni per ricorrenza non autonome	37
Lezione 069: Ulteriori esempi di successioni per ricorrenza non autonome. Studio di una serie con un termine logaritmico (caso limite di confronto asintotico).	41
Lezione 070: Introduzione agli integrali: notazioni, significato geometrico, definizione mediante somme di Riemann superiori e inferiori	45
Lezione 071: Esempi di utilizzo delle somme di Riemann, integrabilità delle funzioni monotone, proprietà degli integrali, esempi di integrali calcolati mediante considerazioni geometriche	49
Lezione 072: Teoria generale per il calcolo operativo di integrali: primitive, funzione integrale, teorema della media integrale, teorema fondamentale del calcolo integrale.	53
Lezione 073: Discorso sul $+c$ negli integrali indefiniti. Primi esempi di primitive elementari.	57
Lezione 074: Integrazione per sostituzione: dimostrazione, interpretazione brutale e primi esempi di applicazione	61
Lezione 075: Integrazione per parti e primi esempi di applicazione: integrali di polinomi per esponenziali, seni, coseni. “Grande ritorno”: integrali di potenze di seni e coseni.	65
Lezione 076: Altro modo di integrare le potenze di seni e coseni. Trucco dell’“1 nascosto” (integrali di logaritmi e arcotangenti) e ulteriori esempi di applicazione dell’integrazione per parti	69
Lezione 077: Integrazione delle funzioni razionali - Parte prima	73
Lezione 078: Integrazione delle funzioni razionali - Parte seconda	77

Lezione 079: Esempi di integrali calcolati utilizzando le tecniche viste finora . . .	81
Lezione 080: Primi esempi di sostituzioni razionalizzanti: esponenziali, seni e coseni, radici di espressioni di primo grado	85
Lezione 081: Sostituzioni razionalizzanti per primitive di radici di polinomi di secondo grado	89
Lezione 082: Sostituzioni razionali per $\sin x$ e $\cos x$ mediante formule parametriche. Esempi di ricapitolazione sul calcolo di integrali.	93
Lezione 083: Integrali impropri: definizioni nei casi monoprobema e spezzamento di un integrale generale in integrali monoprobema.	97
Lezione 084: Studio degli integrali impropri di $1/x^a$ con problemi a 0 e $+\infty$ al variare del parametro a . Discussione dell'utilizzo delle simmetrie nel calcolo degli integrali.	101
Lezione 085: Studio di integrali impropri con integrande di segno costante: criterio del confronto e del confronto asintotico (caso standard e casi limite). Criterio dell'assoluta integrabilità per integrande a segno variabile.	105
Lezione 086: Esempi di studio della convergenza di integrali impropri utilizzando i vari criteri. Integrali impropri con problemi in punti diversi dall'origine.	109
Lezione 087: Confronto serie-integrali e dimostrazione della convergenza/divergenza delle serie armoniche generalizzate. Stima della "coda" di una serie mediante un integrale improprio.	113
Lezione 088: Trucco dell'integrazione per parti per integrali impropri oscillanti (tipo $\sin x/x$, $\cos(x^2)$, $\sin(x^2)$ tra 0 e ∞).	117
Lezione 089: "Metodo dei triangolini" per dimostrare la divergenza di integrali impropri (tipo $ \sin x /x$, $ \cos(x^2) $, $ \sin(x^2) $ tra 0 e ∞). Discussione sulla "non compensazione" tra integrali impropri divergenti.	121
Lezione 090: Teoremi di scambio serie-derivata per serie di potenze. Esempi di calcolo della somma di serie di potenze.	125
Lezione 091: Introduzione alle equazioni differenziali: nomenclatura	129
Lezione 092: Introduzione alle equazioni differenziali: il problema di Cauchy, enunciato dei teoremi di esistenza ed unicità. Esempio di non unicità.	133
Lezione 093: Metodo risolutivo per equazioni differenziali a variabili separabili. Studio della soluzione: intervallo massimale di esistenza, tempo di vita, esistenza globale, blow-up, break-down	137
Lezione 094: Ulteriori esempi di studio di equazioni differenziali a variabili separabili	141
Lezione 095: Equazioni differenziali lineari omogenee: teoria generale e algoritmo per determinare una base dello spazio delle soluzioni nel caso di equazioni a coefficienti costanti (mediante le radici del polinomio caratteristico).	145
Lezione 096: Esempi di risoluzione di equazioni differenziali lineari omogenee. Struttura dell'insieme delle soluzioni di un'equazione non omogenea.	149
Lezione 097: Equazioni differenziali lineari non omogenee: esempi di ricerca per tentativi di una soluzione nel caso di termine non omogeneo esponenziale o trigonometrico	153
Lezione 098: Equazioni differenziali lineari non omogenee: esempi di ricerca per tentativi di una soluzione nel caso di termine non omogeneo polinomiale. Esempio di metodo di variazione delle costanti.	157

Lezione 099: Equazioni differenziali lineari del prim'ordine: formula risolutiva ottenuta con il fattore integrante e attraverso variazione delle costanti.	161
Lezione 100: Numeri complessi: forma cartesiana, parte reale e immaginaria, piano di Gauss, operazioni algebriche, coniugato, modulo.	165
Lezione 101: Forma trigonometrica ed esponenziale di un numero complesso. Interpretazione di modulo, coniugato, prodotto, reciproco, quoziente in forma trigonometrica. Potenza n -esima di un numero complesso.	169
Lezione 102: Radici n -esime di numeri complessi.	173
Lezione 103: Teorema fondamentale dell'algebra. Fattorizzazione di polinomi sui complessi. Fattorizzazione di polinomi a coefficienti reali "accoppiando" le radici complesse coniugate	177
Lezione 104: Esponenziale e logaritmo di numeri complessi	181
Lezione 105: Funzioni trascendenti di numeri complessi: seno e coseno, seno iperbolico e coseno iperbolico. Esempio di equazione con il seno in ambito complesso.	185
Lezione 106: Esercizi misti sui numeri complessi	188
Lezione 107: Esempi di studio del comportamento di soluzioni di equazioni differenziali senza scrivere esplicitamente la soluzione.	192
Lezione 108: Esempi "mondo reale" di equazioni differenziali: oscillatore armonico, oscillazioni forzate, oscillazioni smorzate.	196
Lezione 109: Esempi di esercizi presi da test d'esame e scritti d'esame passati.	199

ANALISI MATEMATICA 1 - LEZIONE 060

Titolo nota

10/11/2012

SUCCESIONI PER RICORRENZA

Come si presenta?

$$a_0 = 2$$

dato iniziale

$$a_{n+1} = 3a_n - 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

legge di passaggio: permette di calcolare un termine sapendo il termine precedente

$$a_0 = 2, \quad a_1 = 3a_0 - 1 = 5, \quad a_2 = 3a_1 - 1 = 14, \quad a_3 = 3a_2 - 1 = 41, \dots$$

$\uparrow$ legge di pass. con $n \geq 0$ $\uparrow$ $n=1$

A differenza delle successioni fornite mediante una formula esplicita, se voglio calcolare a_{2012} per una succ. per ricorrenza devo prima calcolare tutti i termini precedenti.

Domande: come si comporta la successione? Qual è il limite?

Ci sono pochi casi fortunati in cui si riesce a trovare una formula esplicita, ma sono casi speciali.

Obiettivo: studiare comportamento senza formula esplicita.

Notazione

$$a_0 = \alpha$$

 $\uparrow$ dato

$$a_{n+1} = f(a_n)$$

 $\uparrow$ dato e rappresenta la legge di passaggio $\nearrow$ 1° ordine, autonoma

(o anche $a_{15} = \alpha$ dato ... così si trova a_n per $n \geq 15$)

1° ordine = dipendenza dal solo termine precedente

2° ordine: " dai due termini precedenti, ad esempio

$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$$

$$a_0 = \alpha \quad a_1 = \beta$$

$$a_{n+1} = f(a_n, a_{n-1})$$

 $\searrow$ Due dati iniziali

(tanti quanti l'ordine)

$$a_0 = 2$$

$$a_{n+1} = 3a_n - n$$

NON AUTONOMA: la legge di passaggio cambia di volta in volta.

Autonoma: $a_{n+1} = f(a_n)$ Non autonoma: $a_{n+1} = f(a_n, n)$

$$a_0 = 2, \quad a_{n+1} = 3a_n - n$$

$$a_0 = 2, \quad a_1 = 3a_0 - 0 = 6, \quad a_2 = 3a_1 - 1 = 17$$

 $\uparrow$
 $n=0$ $\uparrow$
 $n=1$

$$a_{n+1} = \boxed{n}a_n + 5a_{n-1} \leftarrow 2^\circ \text{ ordine, NON autonoma}$$

Brutalmente: una succ. per ricorrenza è autonoma se n compare solo tra gli indici.

Ci occuperemo solo di succ. per ricorrenza del 1° ordine, autonome e non autonome.

— o — o —

Esempio 1

$$x_{n+1} = x_n^2$$

$$x_0 = \frac{2}{3}$$

Oss. In questo caso si potrebbe trovare una formula esplicita per x_n (esercizio), ma facciamo finta di non riuscirci.

$$\text{Esperimenti: } x_0 = \frac{2}{3}, \quad x_1 = x_0^2 = \frac{4}{9}, \quad x_2 = x_1^2 = \frac{16}{81}$$

Idea: x_n è decrescente e tende a 0. Per dimostrarlo serve un PIANO.

PIANO

$$(i) \quad 0 \leq x_n \leq \frac{2}{3} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$(ii) \quad x_{n+1} \leq x_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$(iii) \quad x_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$$

$$(iv) \quad l = 0$$

Dim (iii)

Dal p.to (ii) sappiamo che x_n è debolm. decrescente

Dal p.to (i), e in particolare da $x_n \geq 0$, sappiamo che x_n è limitata inferiormente

Il teorema delle successioni monotone ci assicura che $x_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$

Dim (iv)

$$\begin{array}{ccc} x_{n+1} & = & x_n^2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ l & = & l^2 \end{array}$$

Sapendo che $a_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$, passo al limite a dx e sx.

Otengo l'equazione $l = l^2$ che ha come soluzioni $l = 0$ e $l = 1$.

Ora $l = 1$ è incompatibile con il fatto che $x_n \leq \frac{2}{3}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, quindi l'unica possibilità è $l = 0$.

Dim di (i)

Devo dim. che $x_n \geq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e

$$x_n \leq \frac{2}{3} \text{ per ogni } n \in \mathbb{N}$$

La prima è banale perché $x_0 = \frac{2}{3} \geq 0$, e poi $x_{n+1} = x_n^2 \geq 0$.

Per dimostrare che $x_n \leq \frac{2}{3}$ procedo per induzione

Passo base

$$n=0 \quad x_0 = \frac{2}{3} \leq \frac{2}{3} \quad \text{ok.}$$

Passo induttivo

$$\text{Ipotesi} \quad x_n \leq \frac{2}{3} \quad \text{Tesi:} \quad x_{n+1} \leq \frac{2}{3}$$

Dim. pass. induttivo: Prendo l'ipotesi ed elevo al quadrato. Trattandosi di roba ≥ 0 conservo i versi

$$x_{n+1} = x_n^2 \leq \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9} \leq \frac{2}{3} \quad \text{quindi } x_{n+1} \leq \frac{2}{3}, \text{ cioè la tesi.}$$

$\uparrow$ ricom. $\uparrow$ ipotesi² $\uparrow$ conto $\uparrow$ banalità

Dim (ii)

Devo dim. che $x_{n+1} \leq x_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

1° modo: **ricomputa + disequazione**

$$\boxed{x_{n+1}} \leq x_n \iff \boxed{x_n^2} \leq x_n \quad \text{ottengo così la diseq.} \quad x^2 \leq x$$

$\xrightarrow{\text{uso ricomputa}}$

$$x^2 - x \leq 0 \quad x(x-1) \leq 0 \quad 0 \leq x \leq 1$$

Quindi $x_n^2 \leq x_n \iff 0 \leq x_n \leq 1$, ma sappiamo già che questo è vero grazie al p.to (i)

(se a_n sta 0 e $\frac{2}{3}$, a maggior ragione sta tra 0 e 1).

— 0 — 0 —

Dim. alternativa del p.to (i)

INDUZIONE CON "APPLICO f "

$$x_{n+1} = x_n^2 = f(x_n)$$

Ossemo che $f(x) = x^2$ è debolmente crescente per $x \geq 0$

Ora procedo per induzione. $n=0$ $0 \leq x_0 \leq \frac{2}{3}$ banale essendo $x_0 = \frac{2}{3}$

Passo induttivo Ipotesi: $0 \leq x_n \leq \frac{2}{3}$ Tesi: $0 \leq x_{n+1} \leq \frac{2}{3}$

Dim. Prendo l'ipotesi e applico f (e posso farlo conservando i versi per cui $f(x)$ è deb. cresc. per $x \geq 0$)

$$\begin{array}{ccccc} 0 \leq x_n \leq \frac{2}{3} & f(0) \leq f(x_n) \leq f\left(\frac{2}{3}\right) & & & \\ & \parallel \quad \downarrow \quad \downarrow & & & \\ & 0 \leq x_{n+1} \leq \frac{4}{9} \leq \frac{2}{3} & & & \end{array}$$

Dim. alternativa p.to (ii)

INDUZIONE + APPLICO $f(x)$

Devo dim. che $x_{n+1} \leq x_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

$n=0$ $x_1 \leq x_0$ sostituendo $\frac{4}{9} \leq \frac{2}{3}$ Ok.

Pass. induttivo Ipotesi: $x_{n+1} \leq x_n$ Tesi: $x_{n+2} \leq x_{n+1}$

Dim. prendo l'ipotesi e applico $f(x)$ (e posso farlo perché dal p.to (i) so già che x_n e x_{n+1} sono ≥ 0).

$$\begin{array}{ccc} x_{n+1} \leq x_n & \xrightarrow{\text{applico } f} & f(x_{n+1}) \leq f(x_n) \\ & & \downarrow \quad \downarrow \\ & & x_{n+2} \leq x_{n+1} \leadsto \text{Tesi} \\ & \text{--- } 0 \text{ --- } 0 \text{ ---} & \end{array}$$

ANALISI MATEMATICA 1 - LEZIONE 061

Titolo nota

10/11/2012

Esempio 1 $x_{n+1} = x_n^2 - x_n + 2$ $x_0 = 2$

In questo caso non c'è proprio formula esplicita.

Esperimenti: $x_0 = 2$, $x_1 = 4$, $x_2 = 14$, $x_3 = 196 - 14 + 2 = 184$

Idea: x_n crescente e $x_n \rightarrow +\infty$

- PIANO
- (i) $x_n \geq 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$
 - (ii) $x_{n+1} \geq x_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$
 - (iii) $x_n \rightarrow l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$
 - (iv) $l = +\infty$

Dim (iii) Segue dal p.to (ii) e dal teo. sulle succ. monotone

Dim (iv) Supponiamo per assurdo che sia $l \in \mathbb{R}$. Allora posso passare al limite a dx e sx della ricorrenza

$$\begin{array}{ccc} x_{n+1} & = & x_n^2 - x_n + 2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ l & = & l^2 - l + 2 \end{array} \quad \leftarrow \text{posso farlo solo se } l \in \mathbb{R}$$

Ho ottenuto l'equazione $l^2 - 2l + 2 = 0$. Ci piacerebbe che non avesse soluzioni o le avesse < 2 , cioè incompatibili con il p.to (i).

In questo caso $\Delta < 0$, quindi non ci sono soluzioni.

L'unica possibilità rimasta è $l = +\infty$.

Dim (i) Considero la funzione $f(x) = x^2 - x + 2$. Vediamo le zone di monotonia: $f'(x) = 2x - 1 \geq 0$ per $x \geq \frac{1}{2}$.

Quindi $f(x)$ è debolmente crescente per $x \geq \frac{1}{2}$.

Dimostro per induzione che $x_n \geq 2$.

$n=0$ $x_0 \geq 2$, ma $x_0 = 2$ quindi Ok

Passo induttivo Ipotesi: $x_n \geq 2$ Tesi: $x_{n+1} \geq 2$

$$x_{n+1} \geq 4 \geq 2 \quad \text{che è la tesi.}$$

Dim. applico f all'ipotesi: $f''(x_n) \geq f''(2)$

Dim (ii) 1° modo: RICORRENZA + DISEQUAZIONE

Devo dim. che $x_{n+1} \geq x_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, cioè (uso ricor.)

$$x_n^2 - x_n + 2 \geq x_n$$

Trovo la diseq. $x^2 - x + 2 \geq x$, cioè $x^2 - 2x + 2 \geq 0$ sempre verificata perché $\Delta < 0$, oppure perché $x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1 \geq 1 \geq 0$.

Quindi $x_{n+1} \geq x_n$ sempre

2° modo: INDUZIONE + APPLICO f Dim. per induzione che $x_{n+1} \geq x_n$.

M=0 $x_1 \geq x_0$ Vero perché $x_0 = 2$ e $x_1 = 4$

Passo induttivo Ipotesi: $x_{n+1} \geq x_n$ Tesi: $x_{n+2} \geq x_{n+1}$

Dim.: prendo l'ipotesi e applico $f(x)$ conservando i versi perché so già dal p.to (i) che x_{n+1} e x_n sono ≥ 2 , quindi in particolare $\geq \frac{1}{2}$, cioè nella zona di crescita di $f(x)$.

$$\begin{array}{ccc} x_{n+1} \geq x_n & \xrightarrow{\text{applico } f} & f(x_{n+1}) \geq f(x_n) \\ & & \text{"} x_{n+2} \geq x_{n+1} \text{"} \rightarrow \text{tesi.} \\ \text{---o---o---} & & \end{array}$$

Esempio 2 $a_0 = 2012$ $a_{n+1} = \sqrt{3a_n + 4}$

Esperimenti: $a_0 = 2012$, $a_1 = \sqrt{6040}$ tra 70 e 80
 $a_2 = \sqrt{200}$ e rotti tra 14 e 20

PIANO

- (i) $a_n \geq 4 \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- (ii) $a_{n+1} \leq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- (iii) $a_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$
- (iv) $l = 4$

Dim. (iii) Per il p.to (ii) è deb. decr. Per il p.to (i) è limitata inferiormente.
 Teo. succ. monotone $\Rightarrow$ il limite esiste ed è reale.

Dim. (iv) Essendo $l \in \mathbb{R}$, posso passare al limite nella ricorrenza:

$$\begin{array}{ccc} a_{n+1} = \sqrt{3a_n + 4} \\ \downarrow \qquad \qquad \downarrow \\ l = \sqrt{3l + 4} \end{array}$$

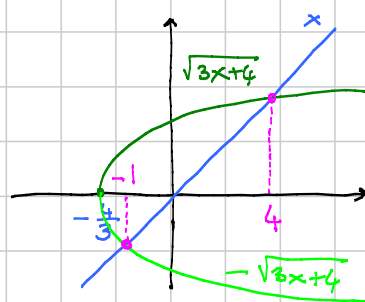
Otengo l'equazione $l = \sqrt{3l + 4}$. Risolvo facendo il quadrato:

$$l^2 = 3l + 4, \quad l^2 - 3l - 4 = 0, \quad (l+1)(l-4) = 0, \quad \text{quindi}$$

$$l = \begin{cases} -1 & \leadsto \text{verifica } -1 = \sqrt{1} \quad \text{NO!} \\ 4 & \leadsto 4 = \sqrt{16} \quad \text{OK!} \end{cases}$$

L'unica sol. buona è $l = 4$

Parenesi: interpretazione grafica dell'eq. $x = \sqrt{3x+4}$



Dim. (i) Devo dim. che $x_n \geq 4 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Induzione + applico $f(x)$

$n=0$ $a_0 \geq 4$ banale essendo $a_0 = 2012$

Passo induttivo Ipotesi: $a_n \geq 4$ Tesi $a_{n+1} \geq 4$

Dim. Prendo l'ipotesi e applico $f(x) = \sqrt{3x+4}$ che è debolmente crescente per $x \geq -\frac{4}{3}$. Ottengo

$$a_n \geq 4 \quad \leadsto \quad f(a_n) \geq f(4), \quad \text{cioè} \quad a_{n+1} \geq 4$$

Dim. (ii) 1° modo: RICORRENZA + DISEQUAZIONE (x_n e a_n scambiate ☺)

Devo dim. $x_{n+1} \leq x_n$, cioè $\sqrt{3x_n+4} \leq x_n$, che rianda alla diseq. $\sqrt{3x+4} \leq x$. Questa ha come soluzione (precorso + interpretazione grafica) $x \geq 4$. Quindi $x_{n+1} \leq x_n$ è vero se $x_n \geq 4$, ma questo sappiamo che è vero grazie al p.to (i).

2° modo: INDUZIONE + APPLICO f

Passo base $a_1 \leq a_0$ banale perché $a_0 = 2012$ e $a_1 \leq 80$

Passo induttivo: Ipotesi: $a_{n+1} \leq a_n$ Tesi: $a_{n+2} \leq a_{n+1}$

Dim. Applico $f(x)$ all'ipotesi e con cambio i versi perché $f(x)$ è monotona crescente nella zona $x \geq -\frac{4}{3}$

$$a_{n+1} \leq a_n \rightsquigarrow \underbrace{f(a_{n+1})}_{=0} \leq \underbrace{f(a_n)}_{=0}, \text{ cioè } a_{n+2} \leq a_{n+1} \text{ che è la tesi.}$$

Esempio 3 $a_{n+1} = a_n^4$ $a_0 = 5$

- PIANO**
- (i) $a_n \geq 5 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (induzione + applico $f(x) = x^4$)
 - (ii) $a_{n+1} \geq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (entrando i casi precedenti)
 - (iii) $a_n \rightarrow l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ (teo. succ. monotone)
 - (iv) $l = +\infty$

Dim. (iv) Suppongo per assurdo $l \in \mathbb{R}$ e passo al limite a dx e sx

$$a_{n+1} = a_n^4$$

$$\downarrow \quad \downarrow$$

$$l = l^4$$

$l = l^4$ ha come soluzioni $l = \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix}$
Entrambe sono incompatibili con il p.to (i),
quindi l'unica possibilità è $l = +\infty$.

Se fosse stato $a_0 = -2$. Se faccio il piano con (i) $a_n \geq -2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ i limiti $l=0$ e $l=1$ sarebbero stati compatibili.

Quindi era meglio iniziare il piano con

(i) $a_n \geq 16$ per ogni $n \geq 1$ e volendo proseguire con

(ii) $a_{n+1} \geq a_n$ per ogni $n \geq 1$

— 0 — 0 —

ANALISI MATEMATICA 1 - LEZIONE 062

Titolo nota

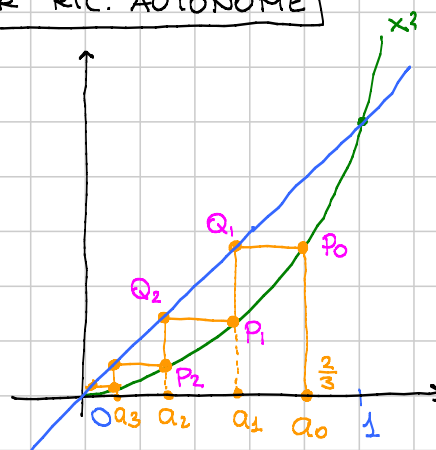
10/11/2012

INTERPRETAZIONE GRAFICA DELLE SUCC. PER RIC. AUTONOME

$$a_{n+1} = a_n^2 \quad a_0 = \frac{2}{3} \quad f(x) = x^2$$

→ Disegno sullo stesso grafico $f(x)$ e la bisettrice $y = x$

(occorre capire dove si incontrano e chi sta sopra/sotto, cioè risolvere $f(x) = x$, $f(x) > x$, $f(x) < x$)



→ Seguo la condizione iniziale $a_0 = \frac{2}{3}$ sull'asse x

→ Seguo lo slogan: **VERTICALE ALLA FUNZIONE
ORIZZONTALE ALLA BISETTRICE**

Scrivo le coordinate dei p.ti P_i e Q_i :

$$P_0 = (a_0, f(a_0)) = (a_0, a_1)$$

$$Q_1 = (a_1, a_1)$$

la x coincide con la y perché è sulla bisettrice
stessa y di P_0

$$P_1 = (a_1, f(a_1)) = (a_1, a_2)$$

↑
stessa x di Q_1

$$Q_2 = (a_2, a_2)$$

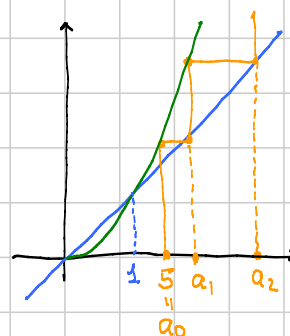
Dall'interpretazione grafica è evidente che a_n decresce e tende a 0.

Queste sono le informazioni che permettono di scrivere il piano.

$$a_{n+1} = a_n^4 \quad a_0 = 5 \quad f(x) = x^4$$

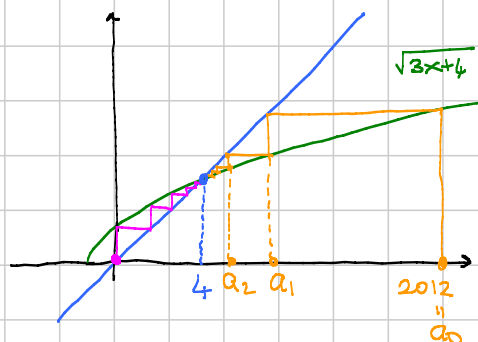
Seguendo lo slogan si vede che $a_n \rightarrow +\infty$

crescendo
occhio a non fare il contrario!!!



$$a_{n+1} = \sqrt{3a_n + 4} \quad a_0 = 2012$$

Dal grafico (fatto bene) è evidente che $a_n \rightarrow 4$ decrescendo.



Oss. Per vedere dove si incontrano il grafico e la bisettrice risolvo $x = \sqrt{3x+4}$, che è esattamente l'eq. che si ritrova al p.to (iv) del piano

Oss. Per vedere dove il grafico di f sta sopra la bisettrice risolvo la disuguaglianza $f(x) > x$, che è quella che si ritrova al p.to (ii) del piano seguendo il metodo "ricomponi + disuguaglianza".

Esempio 1 $a_{n+1} = \sqrt{3a_n + 4} \quad a_0 = 0$

PIANO

(i) $0 \leq a_n \leq 4 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(ii) $a_{n+1} \geq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(iii) $a_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$

(iv) $l = 4$

Stato svolgimento per il piano con la monotonia

Più generale per $a_{n+1} = \sqrt{3a_n + 4} \quad a_0 = \alpha$ si ha che

- $a_n \rightarrow 4$ decrescendo se $\alpha > 4$
- $a_n \rightarrow 4$ crescendo se $\alpha \in [-\frac{4}{3}, 4)$
- $a_n \equiv 4$ (cioè vale sempre 4) se $\alpha = 4$

Esempio 2 $a_{n+1} = \arctan a_n$
 $a_0 = 2012$

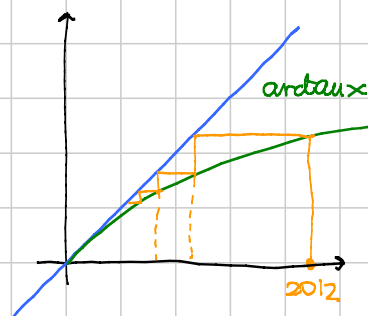
PIANO

(i) $a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(ii) $a_{n+1} \leq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(iii) $a_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$

(iv) $l = 0$



$$a_{n+1} = \sqrt{3a_n + 4} \quad a_0 = 2012 \quad \text{Voglio dimostrare che } a_n \rightarrow 4$$

Pongo $d_n = a_n - 4$ (distanza di a_n dal presunto limite)

Quindi ora voglio dimostrare che $d_n \rightarrow 0$.

$$d_{n+1} = a_{n+1} - 4 = f(a_n) - f(4) = f'(c)(a_n - 4) = f'(c) \cdot d_n$$

$$f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x+4}} \quad \text{Ora se } c \geq 4 \text{ si ha che } f'(c) \leq \frac{3}{8}$$

perché il denominatore minimo si ottiene con $x=4$.

Ho così dimostrato che $d_{n+1} \leq \frac{3}{8} d_n$. Questo vuol dire che

$$d_1 \leq \frac{3}{8} d_0, \quad d_2 \leq \frac{3}{8} d_1 \leq \left(\frac{3}{8}\right)^2 d_0, \quad d_3 \leq \frac{3}{8} d_2 \leq \left(\frac{3}{8}\right)^3 d_0, \dots$$

e in generale $d_n \leq \left(\frac{3}{8}\right)^n d_0 \dots$ RAVVOLTO IL NASTRO si ottiene

PIANO CON LA DISTANZA Pongo $d_n = a_n - 4$

$$(i) \quad a_n \geq 4 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

(Come una volta)

$$(ii) \quad d_{n+1} \leq \frac{3}{8} d_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

(Lagrange come sopra usando il pto (i) per dire che $c \geq 4$)

$$(iii) \quad d_n \leq \left(\frac{3}{8}\right)^n d_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

(inclusione a partire dal pto (ii))

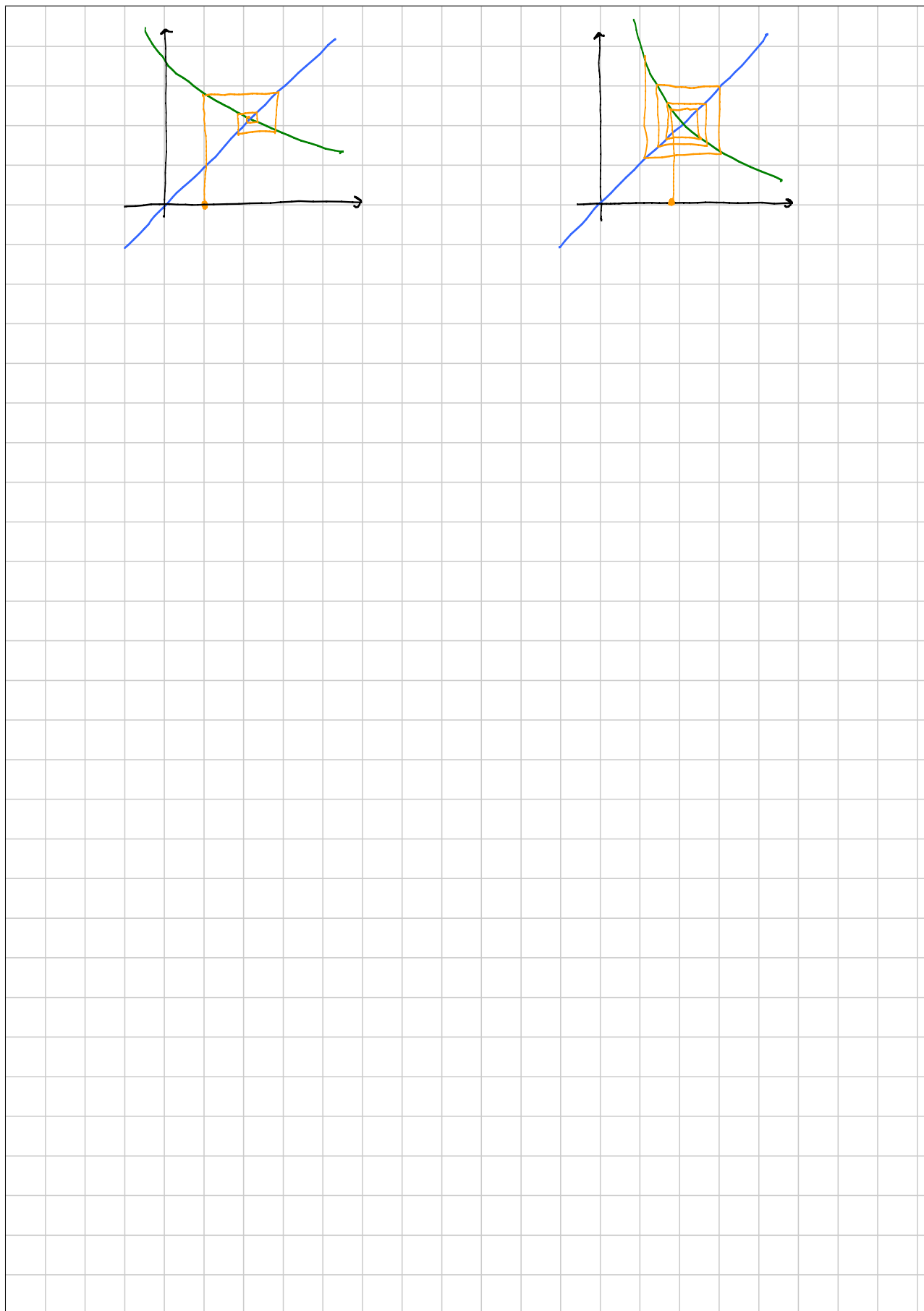
$$(iv) \quad d_n \rightarrow 0$$

Dim. (iv) Grazie al pto (i) ed al pto (iii) sappiamo che

$$0 \leq d_n \leq \left(\frac{3}{8}\right)^n d_0 \quad \text{cioè } d_n \rightarrow 0 \text{ per i carabinieri}$$

Oss. È essenziale che il numero trovato al pto (ii) sia < 1 .

— 0 — 0 —



ANALISI MATEMATICA 1 - LEZIONE 063

Titolo nota

14/11/2012

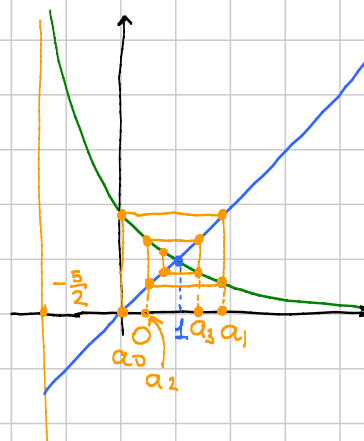
Successioni per ricorrenza spiraleggianti

Esempio 1 $a_{n+1} = \frac{7}{2a_n + 5}$ $a_0 = 0$

$$f(x) = \frac{7}{2x+5} \quad f(x) = x \Leftrightarrow \frac{7}{2x+5} = x$$

$$\Leftrightarrow 7 = 2x^2 + 5x \Leftrightarrow 2x^2 + 5x - 7 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(2x+7) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ oppure } x = -\frac{7}{2}$$



Idea: $a_n \rightarrow 1$ "spiraleggiando", quindi la monotonia non si può usare in maniera diretta.

PIANO CON LA DISTANZA Pongo $d_n = |a_n - 1|$ (distanza di a_n dal presunto limite $l=1$)

La speranza è dimostrare che $d_n \rightarrow 0$, il che è equivalente a dire che $a_n \rightarrow 1$.

Struttura del piano

(i) a_n è certa zona da precisare

(ii) $d_{n+1} \leq c d_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$, dove c è una costante $c < 1$

(iii) $d_n \leq c^n \cdot d_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(iv) $d_n \rightarrow 0$

Dim. (iv) Grazie al p.to (iii) sappiamo che $d_n \rightarrow 0$ per i carabinieri

$$\begin{array}{ccc} \text{val. assol.} & & \text{p.to (iii)} \\ \downarrow & & \downarrow \\ 0 \leq d_n \leq c^n \cdot d_0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ 0 & & 0 \text{ perché } c < 1 \end{array}$$

Dim. (iii) Facile induzione.

Passo base: $n=0 \quad d_0 \leq c^0 \cdot d_0$ ovvio

Passo induttivo Ipotesi: $d_n \leq c^n \cdot d_0$ Tesi: $d_{n+1} \leq c^{n+1} \cdot d_0$

p.to (ii) $\text{Hp. ind. per } c$ precorso

$$\text{Dim.} \quad d_{n+1} \leq c d_n \leq c \cdot c^n d_0 = c^{n+1} d_0 \quad \text{il che è la tesi.}$$

Provo a trovare il fattore c nell'esempio.

1° modo: uso ricorrenza e spero...

$$\begin{aligned}
 d_{n+1} &\stackrel{\text{def.}}{=} |a_{n+1} - 1| \stackrel{\text{ricor.}}{=} \left| \frac{7}{2a_n + 5} - 1 \right| = \left| \frac{7 - 2a_n - 5}{2a_n + 5} \right| = \frac{2|1 - a_n|}{|2a_n + 5|} \\
 &= \frac{2}{|2a_n + 5|} \cdot du \stackrel{c < 1}{\leq} \frac{2}{5} \cdot du \quad \begin{array}{l} \uparrow \\ \text{se sapessi che} \\ a_n \geq 0 \text{ sempre} \end{array}
 \end{aligned}$$

$= |a_n - 1| = du$

Posso ora scrivere il piano definitivo

- (i) $a_n \geq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$
- (ii) $d_{n+1} \leq \frac{2}{5} d_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$
- (iii) $d_n \leq \left(\frac{2}{5}\right)^n \cdot d_0$ " " "
- (iv) $d_n \rightarrow 0$

Dim (i) Induzione banale. $n=0$ è vero.

$n \Rightarrow n+1$ Se $a_n \geq 0$, allora $\frac{7}{2a_n + 5} > 0$ il che permette di passare dall'ipotesi alla tesi.

Dim (ii) Conto fatto sopra

Dim (iii) e (iv) Esattamente come nel caso generale.

Oss. Se fosse servita una limitazione per a_n dall'alto e dal basso, avrei potuto dimostrare che

$$\underbrace{0}_{a_0} \leq a_n \leq \underbrace{\frac{7}{5}}_{a_1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Anche questa si dimostra facilmente per induzione: $n=0$ ok.

Passo induttivo Ipotesi: $0 \leq a_n \leq \frac{7}{5}$ Tesi: $0 \leq a_{n+1} \leq \frac{7}{5}$

Dim. Prendo l'ipotesi e "applico $f(x)$ ". La funzione $f(x)$ è debolmente decrescente nell'intervallo $[0, \frac{7}{5}]$, quindi posso applicarla MA DEVO INVERTIRE I VERSI.

Quindi partendo da $0 \leq a_n \leq \frac{7}{5}$ ottengo

$$f(0) \geq f(a_n) \geq f\left(\frac{7}{5}\right)$$

$$\frac{7}{5} \geq a_{n+1} \geq \frac{7}{2 \cdot \frac{7}{5} + 5} = \frac{35}{39} \geq 0$$

$\frac{35}{39} \stackrel{a_2}{\geq} 0$

Ho quindi ottenuto che $\frac{7}{5} \geq a_{n+1} \geq 0$, che è proprio la tesi.

2° modo di ottenere il punto (ii): esaminiamo più in generale il 1° modo uguale per come ho trovato e

$$d_{n+1} = |a_{n+1} - 1| = |f(a_n) - f(1)|$$

Supponiamo ora di sapere che $f(x)$, nella zona in questione, è Lipschitziana con una costante c . Allora ho che

$$|f(a_n) - f(1)| \leq c |a_n - 1| = c d_n \quad \text{da cui} \quad d_{n+1} \leq c d_n.$$

Tutto sta a capire la costante c , cioè $\sup \{|f'(x)| : x \in \text{zona in questione}\}$

$$f'(x) = -\frac{7 \cdot 2}{(2x+5)^2}, \quad \text{quindi} \quad |f'(x)| = \frac{14}{(2x+5)^2}$$

La zona in questione è quella in cui abbiamo detto che sta a_n , cioè ad esempio $x \geq 0$. Per $x \geq 0$ il sup vale $\frac{14}{25}$ e va bene perché è < 1 .

In questo caso il piano sarebbe stato (i) $a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$(ii) \quad d_{n+1} \leq \frac{14}{25} d_n \quad \text{" (via lip.)}$$

(iii) e (iv) come sopra

— 0 — 0 —

Oss. La successione a_n NON è monotona.

Tuttavia a_{2n} è debolmente crescente e a_{n+1} è debolmente decrescente.

In una sola formula posso scrivere che

$$a_{2n} \leq a_{2n+2} \leq 1 \leq a_{2n+3} \leq a_{2n+1}$$

La relazione precedente si dimostra per induzione.

$n=0$ Devo verificare che $a_0 \leq a_2 \leq 1 \leq a_3 \leq a_1$, il che richiede di calcolare i termini a_0, a_1, a_2, a_3 e sostituire.

Passo induttivo Ipotesi: $a_{2n} \leq a_{2n+2} \leq 1 \leq a_{2n+3} \leq a_{2n+1}$
 Tesi: $a_{2n+2} \leq a_{2n+4} \leq 1 \leq a_{2n+5} \leq a_{2n+3}$

Dim. Prendo l'ipotesi e "applico $f(x)$ " INVERTENDO I VERSI

$$\begin{array}{ccccccc} f(a_{2n}) & \geq & f(a_{2n+2}) & \geq & f(1) & \geq & f(a_{2n+3}) \geq f(a_{2n+1}) \\ \text{"} & & \text{"} & & \text{"} & & \text{"} \\ a_{2n+1} & \geq & a_{2n+3} & \geq & 1 & \geq & a_{2n+4} \geq a_{2n+2} \end{array} \quad \text{quello che volevo}$$

Applico ancora $f(x)$:

$$\begin{array}{ccccccc} f(a_{2n+1}) & \leq & f(a_{2n+3}) & \leq & f(1) & \leq & f(a_{2n+4}) \leq f(a_{2n+2}) \\ \text{"} & & & & \text{"} & & \\ a_{2n+2} & \leq & a_{2n+4} & \leq & 1 & \leq & a_{2n+5} \leq a_{2n+3} \end{array}$$

esattamente la tesi che volevo.

Applicando 2 volte $f(x)$:

- i versi tornano gli stessi
- gli indici salgono di 2.

— 0 — 0 —

ANALISI MATEMATICA 1 - LEZIONE 064

Titolo nota

14/11/2012

Successioni spiraleggianti: metodo delle 2 sottosuccessioni

Esempio 1 $a_{n+1} = \frac{7}{2a_n + 5} \quad a_0 = 0.$

Idea! Le 2 sottosuccessioni a_{2n} e a_{2n+1} sono monotone.PIANO

(i) $0 \leq a_n \leq \frac{7}{5} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(ii) a_{2n} è debolmente crescente, a_{2n+1} è debolmente decrescente

$$a_{2n} \leq a_{2n+2} \leq 1 \leq a_{2n+3} \leq a_{2n+1}$$

(iii) $a_{2n} \rightarrow l \in \mathbb{R}$

$$a_{2n+1} \rightarrow m \in \mathbb{R}$$

(iv) $l = m = 1$

Questo basta per concludere che $a_n \rightarrow 1$ globalmente.Dim. (i) Induzione esattamente come prima.Dim. (ii) Quella di prima: per induzione applicando 2 volte $f(x)$ dopo aver osservato che $f(x)$ è decrescente nella zona data dal p.to (i)Dim. (iii) a_{2n} è deb. crescente e limitata superiormente (da 1 o da $\frac{7}{5}$)Quindi $a_{2n} \rightarrow l \in \mathbb{R}$. a_{2n+1} è deb. decrescente e limitata inferiormente (da 0 o da 1)Quindi $a_{2n+1} \rightarrow m \in \mathbb{R}$ Dim. (iv) Scrivo la ricorrenza in versione pari e versione dispari.

$$\begin{array}{ccc} a_{2n+1} & = & \frac{7}{2a_{2n} + 5} \\ \downarrow & & \downarrow \\ m & = & \frac{7}{2l + 5} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} a_{2n+2} & = & \frac{7}{2a_{2n+1} + 5} \\ \downarrow & & \downarrow \\ l & = & \frac{7}{2m + 5} \end{array}$$

Una volta trovato una singola equazione in l , ora trovo 2 equazioni in m ed l . Si tratta quindi di risolvere il sistema

$$\begin{cases} m = \frac{7}{2l+5} \\ l = \frac{7}{2m+5} \end{cases} \quad \begin{aligned} 2ml + 5m &= 7 \\ 2ml + 5l &= 7 \end{aligned} \quad \begin{aligned} &\text{Sottraggo e ottengo } 5(m-l)=0, \\ &\text{cioè } m=l, \text{ quindi trovo a} \end{aligned}$$

$$l = \frac{7}{2l+5} \quad \text{da cui come prima} \quad l = \frac{7}{2 \cdot \frac{7}{2l+5} + 5}$$

$l = \frac{7}{2} \uparrow$
incompatibile con p.to ci)

Esempio 2 $a_{n+1} = \frac{7}{5a_n+2} \quad a_0 = 0$

$$f(x) = \frac{7}{5x+2} \quad f(x) = x \text{ ha come soluzione}$$

$x=1$ più una solus. negativa

Piano con la distanza

$$d_n = |a_n - 1| \quad (i) \quad 0 \leq a_n \leq \frac{7}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$\frac{7}{2} = a_1$

$$(ii) \quad d_{n+1} \leq c d_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

(iii) e (iv) come sempre

Tutto sta a trovare c ...

1° modo

$$d_{n+1} = |a_{n+1} - 1| = \left| \frac{7}{5a_n+2} - 1 \right| = \frac{|7-5a_n-2|}{|5a_n+2|} = \frac{5|1-a_n|}{|5a_n+2|} = \frac{5}{|5a_n+2|} d_n$$

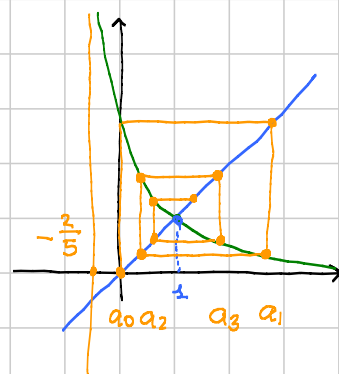
al max può arrivare a $\frac{5}{2}$
che è ≥ 1 . ☹️

2° modo Cerco la costante di Lip. in $[0, \frac{7}{2}]$ che è la zona in cui sta a_n .

$$|f'(x)| = \left| -\frac{7 \cdot 5}{(5x+2)^2} \right| = \frac{35}{(5x+2)^2} \quad \text{il max di questa in } [0, \frac{7}{2}] \text{ è } \frac{35}{4} \geq 1 \quad \text{☹️}$$

Come rimediare? Cercare una limitazione dal basso per a_n che sia migliore di 0.

Calcolo un po' di termini



$$a_0 = 0, \quad a_1 = \frac{7}{2}, \quad a_2 = \frac{7}{5 \cdot \frac{7}{2} + 2} = \frac{14}{39}$$

$$a_3 = \frac{7}{5 \cdot \frac{14}{39} + 2} = \frac{7 \cdot 39}{158}, \quad a_4 = \frac{7}{5 \cdot \frac{7 \cdot 39}{158} + 2} = \text{numeracolo}$$

Spero che $\frac{5}{15a_4+2}$ sia < 1 oppure che $\frac{35}{(5a_4+2)^2}$ sia < 1 .

Se uno dei 2 è vero, allora posso $c =$ quel valore e ho il solito piano con la distanza

(i) $a_n \geq a_4$ per ogni $n \geq 4$

Inclusione

(ii) $d_{n+1} \leq d_n$ per ogni $n \geq 4$

Fatto sopra

(iii) $d_n \leq c^{n-4} d_4$ per ogni $n \geq 4$

Inclusione usando (ii)

(iv) $d_n \rightarrow 0$

Soliti carabinieri.

Secondo modo di procedere Piano con le 2 sottosuccessioni

(i) $a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Banale inclusione

(ii) $a_{2n} \leq a_{2n+2} \leq 1 \leq a_{2n+3} \leq a_{2n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Solito applico f 2 volte.

(iii) $a_{2n} \rightarrow l \in \mathbb{R} \quad a_{2n+1} \rightarrow m \in \mathbb{R}$

Solito teo. succ. monot.

(iv) $l = m = 1$

Come prima

Oss. Nel pto (ii) al passo base dovrai verificare che

$$a_0 \leq a_2 \leq 1 \leq a_3 \leq a_1$$

$$0 \leq \frac{14}{39} \leq 1 \leq \frac{7}{2}$$

Sapendo che $a_0 \leq a_2 \leq 1$, applico f e ottengo $f(a_0) \geq f(a_2) \geq f(1)$
 $a_1 \geq a_3 \geq 1$

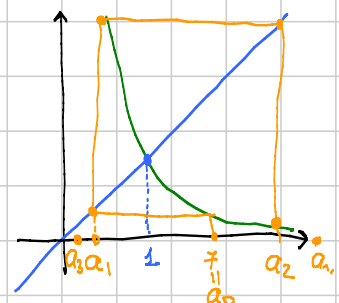
— 0 — 0 —

Esempio 2 $a_{n+1} = \frac{1}{a_n^2} \quad a_0 = 7$

Idea: c'è spiraleggiamento uscente. Meglio

$a_{2n} \rightarrow +\infty$ crescendo

$a_{2n+1} \rightarrow 0$ decrescendo



PIANO(i) $a_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ (ii) $a_{2m+3} \leq a_{2m+1} \leq 1 \leq a_{2m} \leq a_{2m+2}$ (iii) $a_{2n} \rightarrow l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ $a_{2m+1} \rightarrow m \in \mathbb{R}$ (iv) $l = +\infty$ e $m = 0$

Inclusione banale

Applico f 2 volte

Solito

Dim (iv)Se per assurdo l ed m fossero reali ... sistema ...avrei che $l = m = 1$.Tuttavia $a_n \geq 7$ per n pari, e questo le impedisce di tendere ad $l = 1$.

ANALISI MATEMATICA 1 - LEZIONE 065

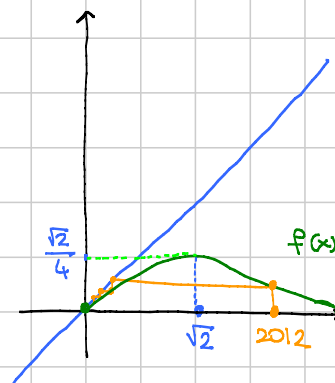
Titolo nota

15/11/2012

Esempio 1 $a_{n+1} = \frac{a_n}{2+a_n^2}$ $a_0 = 2012$

$f(x) = \frac{x}{2+x^2}$ Studio rapido di funzione

Funzione dispari, $f(0) = 0$, definita e continua in tutto $\mathbb{R}$, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$.



Zeri e segno: $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$
 $f(x) > 0 \Leftrightarrow x > 0$
 $f(x) < 0 \Leftrightarrow x < 0$

Devo studiare la posizione di $f(x)$ rispetto alla bisettrice, cioè risolvere

$$f(x) = x \quad \frac{x}{2+x^2} = x \Leftrightarrow x = 2x + x^3 \Leftrightarrow x^3 + x = 0 \Leftrightarrow x(x^2+1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$f(x) > x \quad \frac{x}{2+x^2} > x \Leftrightarrow \frac{x}{2+x^2} - x > 0 \Leftrightarrow \frac{x - 2x - x^3}{2+x^2} > 0$$

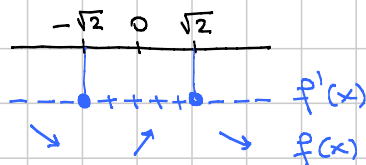
$$\Leftrightarrow -\frac{x^3 + x}{2+x^2} > 0 \Leftrightarrow -\frac{x(x^2+1)}{2+x^2} > 0 \Leftrightarrow -x > 0 \Leftrightarrow x < 0$$

Ora so che per $x > 0$ la funzione $f(x)$ sta SOTTO x .

Studio la monotonia di $f(x)$

$$f'(x) = \frac{2+x^2-2x \cdot x}{(2+x^2)^2} = \frac{2-x^2}{(2+x^2)^2}$$

Il segno di $f'(x)$ dipende dal segno di $2-x^2$



[Esercizio: studiare la derivata 2ª (inutile ai fini della succ. per ricorrenza): ci aspettiamo $f''(x) < 0$ in $(0, \alpha)$ e $f''(x) > 0$ in $(\alpha, +\infty)$ per un certo $\alpha > \sqrt{2}$ (e analogamente sugli $x < 0$)].

Idea proveniente dal grafico: $a_n \rightarrow 0$ decrescendo.

PIANO CON LA MONOTONIA

(i) $a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (induzione banale)

(ii) $a_{n+1} \leq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(iii) $a_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$ (debolm. decrescente + limitata inferior.)

(iv) $l = 0$.

Dim (ii) Uso ricorrenza + disequazioneDevo dim. che $a_{n+1} \leq a_n$, cioè $\frac{a_n}{2+a_n^2} \leq a_n$, il che riconduce alladisequazione $f(x) \leq x$, già risolta per posizionare il grafico. La soluzione è $x \geq 0$. Pertanto $a_{n+1} \leq a_n \Leftrightarrow a_n \geq 0$, che è vero per il p.to (i).Dim (iv) Passo al limite nella ricorrenza:

$$\begin{array}{c} a_{n+1} = \frac{a_n}{2+a_n^2} \\ \downarrow \\ l = \frac{l}{2+l^2} \end{array}$$

Ritroviamo l'equazione $l = f(l)$, già risolta per posizionare i grafici.L'unica soluzione sappiamo essere $l = 0$.Oss. Non si poteva da subito usare "induzione + applico $f(x)$ " per dim. il p.to (ii) poiché $f(x)$ NON è crescente per $x \geq 0$.

Possibile rimedio: cambiano i p.ti (i) e (ii) del piano

(i-NEW) $0 \leq a_n \leq \sqrt{2} \quad \forall n \geq 1$

(ii-NEW) $a_{n+1} \leq a_n \quad \forall n \geq 1$

Dim (i-NEW) Induzione: $[n=1]$ $0 \leq a_1 \leq \sqrt{2}$, cioè $0 \leq \frac{2012}{2+2012^2} \leq \sqrt{2}$ OkPasso induttivo Ipotesi: $0 \leq a_n \leq \sqrt{2}$ Tesi: $0 \leq a_{n+1} \leq \sqrt{2}$ Dim. prendo l'ipotesi e applico $f(x)$ (ora posso perché $f(x)$ è strett. cresc. in $[0, \sqrt{2}]$). Ottengo

$$\begin{array}{c} f(0) \leq f(a_n) \leq f(\sqrt{2}) \\ 0 \leq a_{n+1} \leq \frac{\sqrt{2}}{4} \leq \sqrt{2} \end{array} \quad \text{che è proprio la tesi.}$$

Dim. (i-NEW) Ora posso fare induzione + applico $f(x)$

Passo base $n=1$ $a_2 \leq a_1 \dots$ bisogna calcolarli $\dots$

Passo induttivo: $\dots$ prendo l'ipotesi e applico f (posso perché $\dots$) $\dots$
e ottengo la tesi.

Oss. Posso fare un piano con la distanza? Proviamo $\dots$ $d_n = |a_n|$

$$(i) \quad 0 \leq a_n \leq \sqrt{2} \quad \forall n \geq 1$$

(Esattamente come sopra)

$$(ii) \quad d_{n+1} \leq \frac{1}{2} d_n \quad \forall n \geq 1$$

$$(iii) \quad d_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} d_1 \quad \forall n \geq 1$$

$$(iv) \quad d_n \rightarrow 0, \text{ quindi anche } a_n \rightarrow 0.$$

$$\begin{aligned} \text{Dim. (ii)} \quad \sup \{ |f'(x)| : x \in [0, \sqrt{2}] \} &= \sup \left\{ \left| \frac{2-x^2}{(2+x^2)^2} \right| : x \in [0, \sqrt{2}] \right\} \\ &= \sup \left\{ \frac{2-x^2}{(2+x^2)^2} : x \in [0, \sqrt{2}] \right\} \\ &= \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$\nwarrow$ inutile in quanto
è nona ≥ 0
nell'intervallo

(devo prendere il num. max possibile $\leadsto 2$
e il denominatore min. possibile $\leadsto 4$)
(in alternativa si può studiare la funzione $\frac{2-x^2}{(2+x^2)^2}$)

Ora sappiamo che $f(x)$ è lip. con costante $\frac{1}{2}$ nell'intervallo $[0, \sqrt{2}]$.

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{def.}}}{d_{n+1}} = |a_{n+1} - 0| = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ricor.}}}{|f(a_n) - f(0)|} \leq \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Lip}}}{\frac{1}{2}} |a_n - 0| = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{def.}}}{\frac{1}{2}} d_n$$

Dim. (iii) Induzione a partire da (ii): $n=1$: $d_1 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^0 d_1$ ok

Passo induttivo: Ipotesi: $d_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} d_1$ Tesi: $d_{n+1} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n d_1$

$$\text{Dim.} \quad d_{n+1} \leq \underset{\substack{\uparrow \\ \text{p.to (ii)}}}{\frac{1}{2}} d_n \leq \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Ipotesi}}}{\frac{1}{2}} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{precorso}}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} d_1} = \left(\frac{1}{2}\right)^n d_1 \quad \text{che è la tesi}$$

$\nwarrow$ moltip. per $\frac{1}{2}$

Dim. (iv) Solita con i carabinieri.

Oss. Studiare $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ Occhio: a_n è data dalla ricorrenza, quindi NON c'è una formula esplicita !!!

Sappiamo che $a_n \rightarrow 0$, quindi c'è la cond. nec., quindi la serie potrebbe convergere.

Osserviamo che $a_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ (banale variante del p.to c:)), quindi posso applicare il rapporto:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\overbrace{a_n}^{a_{n+1} \text{ dalla ricorrenza}}}{2 + a_n^2} \cdot \frac{1}{\overbrace{a_n}} \rightarrow \frac{1}{2} < 1, \text{ quindi la serie converge.}$$

— o — o —

ANALISI MATEMATICA 1 - LEZIONE 066

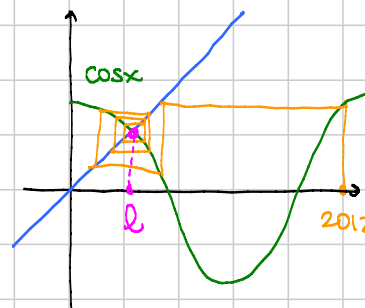
Titolo nota

15/11/2012

Esercizio $a_{n+1} = \cos a_n$ $a_0 = 2012$

Corrisponde a scrivere 2012 su una calcolatrice e poi continuare a premere "cos": quello che si ottiene sono i vari termini della succ.

Sperimentalmente si vede che dopo un po' il numero "non cambia più"



Idea: $\cos x = x$ ha un'unica soluzione reale l ed $a_n \rightarrow l$

Oss. Se fosse vero quanto dichiarato, iterare la successione per ricorrenza è un modo per approssimare la soluzione dell'equazione.

Prima parte: mostrare che l'equazione $\cos x = x$ ha un'unica soluzione.

Considero la funzione $f(x) = x - \cos x$ ed osservo che

→ definita e continua in $\mathbb{R}$ con $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

Questo garantisce la surgettività, quindi esiste ALMENO una soluzione

→ $f'(x) = 1 + \sin x \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sin x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow$ annullamento sporadico

$f'(x) \geq 0$ sempre con annullamento sporadico $\Rightarrow$ (Monotonia 3) $f(x)$

strett. crescente $\Rightarrow f$ iniettiva $\Rightarrow$ esiste AL PIÙ una soluzione.

Quindi la soluzione esiste ed è unica, volendo sappiamo anche che la soluzione l dell'eq. sta tra 0 e 1: infatti $f(0) = -1$ e $f(1) = 1 - \cos 1 > 0$ quindi la soluzione sta tra 0 e 1 per il teo. dei valori intermedi.

— 0 — 1 —

Torniamo alla successione per ricorrenza, quindi d'ora in poi $f(x) = \cos x$

Problema: $f(x)$ è lip. su tutto $\mathbb{R}$ con costante 1, questo produce

$d_{n+1} \leq d_n$, che non basta per dire che $d_n \rightarrow 0$

PIANO CON LA DISTANZA Provo $du = |a_n - l|$ soluzione di $\cos x = x$

(i) $-1 \leq a_n \leq 1 \quad \forall n \geq 1$

(basse inclusioni)

(ii) $du_{n+1} \leq (\sin 1) du_n \quad \forall n \geq 1$

(iii) $du \leq (\sin 1)^{n-1} d_1 \quad \forall n \geq 1$

(inclusione a partire da (ii))

(iv) $du \rightarrow 0$, cioè $a_n \rightarrow l$

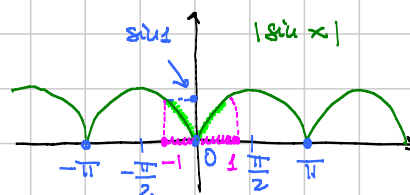
(solito carabinieri perché $\sin 1 \in (0,1)$)

Dim (ii) Dico che $f(x) = \cos x$ è lip. in $[-1,1]$ con costante $C = \sin 1$
Infatti

$$C = \sup \{ |f'(x)| : x \in [-1,1] \} = \sup \{ |\sin x| : x \in [-1,1] \}$$

$$= \sin 1$$

Detto altrimenti: quando x varia tra -1 e 1 , il massimo valore raggiunto da $|\sin x|$ è $\sin 1$.



$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{def.}}}{du_{n+1}} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ricom.} \\ l = \cos l}}{|a_{n+1} - l|} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{lip.}}}{|\cos(a_n) - \cos(l)|} \leq (\sin 1) \cdot |a_n - l| = (\sin 1) \cdot du_n$$

Abbiamo così dimostrato che $a_n \rightarrow l$. La convergenza è esponenziale per il p.to (iii). Ad esempio

$\sum_{n=0}^{\infty} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{du}}}{|a_n - l|}$ come si comporta? Provo con il criterio del rapporto

$$\frac{du_{n+1}}{du_n} = \frac{|a_{n+1} - l|}{|a_n - l|} = \frac{|\cos(a_n) - \cos(l)|}{|a_n - l|} = \frac{|f'(c_n)| \cdot |a_n - l|}{|a_n - l|}$$

$\uparrow$
Lagrange
 $f(x) = \cos x$

$$= |\sin(c_n)|$$

Ora c_n sta tra a_n ed l , quindi $c_n \rightarrow l$
 $\rightarrow \sin l < 1$ e quindi $|\sin(c_n)| \rightarrow \sin l$
 $\uparrow$
 perché $l \in [-1,1]$.

Perché $\frac{du_{n+1}}{du_n} \rightarrow \sin l < 1$, si ha che $\sum du_n$ converge.

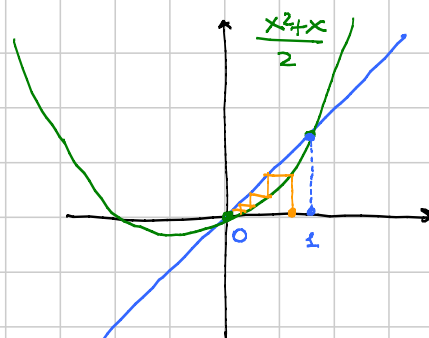
Achtung! $a_{n+1} = \frac{a_n + a_n^2}{2}$ $a_0 = \alpha$

Cosa succede al variare di α .

$$f(x) = \frac{x+x^2}{2} \quad f(x) = x \Leftrightarrow \frac{x+x^2}{2} = x$$

$$\Leftrightarrow x+x^2 = 2x \Leftrightarrow x^2 = x$$

$$\Leftrightarrow x=0 \text{ oppure } x=1.$$



Per $0 < \alpha < 1$ sembra che $a_n \rightarrow 0$ decrescendo

- PIANO**
- (i) $0 < a_n < 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ inclusione + applico f
 - (ii) $a_{n+1} \leq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ " "
 - (iii) $a_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$ Solito
 - (iv) $l = 0$

Din (iv) Passo al limite nella ricorrenza

$$a_{n+1} = \frac{a_n + a_n^2}{2}$$

$$\downarrow$$

$$l = \frac{l + l^2}{2} \Rightarrow l = 0 \text{ o } 1$$

Il punto (i) NON permette di escludere

$l=0$ e nemmeno $l=1$. Infatti

LE DISUGUAGLIANZE STRETTE NON PASSANO AL LIMITE

Come faccio per escludere $l=1$? Due modi

$\rightarrow$ cambio il piano mettendo (i) $0 \leq a_n \leq \alpha \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\rightarrow$ lascio invariato il piano, ma poi osservo che a_0 parte da α e poi è debolmente decrescente, quindi sarà sempre $\leq \alpha$, quindi non può tendere a 1.

[Esercizio: vedere cosa succede per gli altri valori di α].

— 0 — 0 —

ANALISI MATEMATICA 1 - LEZIONE 067

Titolo nota

16/11/2012

Successioni per ricorrenza NON AUTONOME

$a_0 = \alpha$

$a_{n+1} = f(a_n, n)$

la legge di passaggio
dipende anche da n

L'UNICA REGOLA È CHE NON CI SONO REGOLE

Esempio 1 $a_0 = 2012$ $a_{n+1} = \frac{a_n}{n^2+3}$

$$a_0 = 2012, \quad a_1 = \frac{2012}{3} = 600 + q.c., \quad a_2 = \frac{600 + q.c.}{4} = 150 + q.c.$$

Sembra che a_n sia decrescente e tenda a 0.

PIANO CON MONOTONIA

PIANO

(i) $a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(Facile induzione)

(ii) $a_{n+1} \leq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(iii) $a_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$

(Debole. dec. + limitata rif.)

(iv) $l = 0$

Dim. (i)Ricorrenza + disuguaglianza. Devo dim. che $a_{n+1} \leq a_n$, cioè

$$\frac{a_n}{n^2+3} \leq a_n \Leftrightarrow \frac{a_n}{n^2+3} - a_n \leq 0 \Leftrightarrow \frac{a_n(1-n^2-3)}{n^2+3} \leq 0 \Leftrightarrow -\frac{a_n(n^2+2)}{n^2+3} \leq 0$$

$$\frac{a_n(n^2+2)}{n^2+3} \geq 0 \Leftrightarrow a_n \geq 0 \text{ che è vero per il punto (i)}$$

Dim. (iv)Sappiamo che $a_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$. Allora passo al limite nella ricor.

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{n^2+3}$$

$\downarrow$ $\downarrow$
 $l = 0$

Achtung! Evitare questa scrittura:

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{n^2+3}$$

$\downarrow$ $\downarrow$
 $l = \frac{l}{n^2+3} \rightarrow 0$

LIMITE METÀ
PER VOLTA

PIANO CON RAPPORTO(i) $a_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (Facile inclusione)(ii) $\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow 0$, dunque $a_n \rightarrow 0$.**Dim. (ii)**

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\cancel{a_n}}{n^2+3} \cdot \frac{1}{\cancel{a_n}} = \frac{1}{n^2+3} \rightarrow 0$$

$\uparrow$
uso ricor.

PIANO LIMITATEZZA + CARABINIERI(i) $0 \leq a_n \leq 10.000 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (ii) $a_n \rightarrow 0$ **Dim. (i)** Per induzione. Passo base $n=0$: $0 \leq a_0 \leq 10.000$ Ok.
2012Passo induttivo Ipotesi: $0 \leq a_n \leq 10.000$ Tesi: $0 \leq a_{n+1} \leq 10.000$ Dim. Prendo l'ipotesi e divido per n^2+3 (che è una quantità >0 , quindi conservo i versi)

$$\frac{0}{n^2+3} \leq \frac{a_n}{n^2+3} \leq \frac{10.000}{n^2+3}$$

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

Esempio 2 $a_1 = 2012$ $a_{n+1} = \frac{n^3}{2^n} a_n$

Esperimenti: $a_1 = 2012$, $a_2 = \frac{1}{2} \cdot 2012 = 1.006$, $a_3 = \frac{8}{4} a_2 = 2a_2 = 2012$

$$a_4 = \frac{27}{8} \cdot 2012 \geq 3 \cdot 2012 \geq 6.036$$

$$a_5 = \frac{64}{16} \cdot 6.036 = 4 \cdot 6.036 = 24.000 + q.c.$$

Idea: $a_n \rightarrow 0$

PIANO CON RAPPORTO

(i) $a_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (Facile)

(ii) $\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow 0$, quindi $a_n \rightarrow 0$

Dim. (ii)

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \stackrel{\text{ricor.}}{=} \frac{n^3}{2^n} \cdot \frac{1}{a_n} = \frac{n^3}{2^n} \rightarrow 0$$

↓ questo termine tende a 0, ma inizialmente cresce,

Esempio 3 $a_{n+1} = \frac{2a_n + 3n}{n+4}$ $a_0 = 2012$

LIMIT. + CARAB. (i) $0 \leq a_n \leq 10.000 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(ii) $a_n \rightarrow 3$

Dim. (i) Per induzione, $n=0$ $0 \leq a_0 \leq 10.000$ ovvio

Passo induttivo Ipotesi: $0 \leq a_n \leq 10.000$ Tesi: $0 \leq a_{n+1} \leq 10.000$

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Dim.} & 0 \leq & \frac{3n}{n+4} & \stackrel{H_p}{\leq} & \frac{2a_n + 3n}{n+4} & \stackrel{H_p}{\leq} & \frac{20.000 + 3n}{n+4} \stackrel{?}{\leq} 10.000 \\ & \uparrow & & & \uparrow & & \uparrow \\ & \text{banale} & & & a_{n+1} & & \text{spero} \end{array}$$

Controllo la speranza: $\frac{20.000 + 3n}{n+4} \leq 10.000 \Leftrightarrow$

$$20.000 + 3n \leq 10.000n + 40.000 \Leftrightarrow 0 \leq 9.997n + 20.000 \text{ che \textbf{\textit{è}}}$$

verissimo. corretto dopo video

Dim. (ii) Dal punto (i) sappiamo, come abbiamo già scritto, che

$$\frac{3n}{n+4} \leq a_{n+1} \leq \frac{20.000+3n}{n+4}$$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
 3 3 3

Per i carabinieri abbiamo che $a_{n+1} \rightarrow 3$, quindi anche $a_n \rightarrow 3$.

Oss. Vediamo che succede impostando la monotonia

$$a_{n+1} \geq a_n \Leftrightarrow \frac{2a_n + 3n}{n+4} \geq a_n \Leftrightarrow 2a_n + 3n \geq na_n + 4a_n$$

$$\Leftrightarrow (n+2)a_n \leq 3n \Leftrightarrow a_n \leq \frac{3n}{n+2}$$

$$\text{Analogamente: } a_{n+1} \leq a_n \Leftrightarrow a_n \geq \frac{3n}{n+2}$$

Quindi per avere la monotonia mi servirebbe un piano in cui dal punto (i) seguisse che $a_n \geq \frac{3n}{n+2}$

- | | | |
|----------------------------|--|-----------------------|
| PIANO CON MONOTONIA | (i) $a_n \geq 3 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ | (conclusione! fine!) |
| | (ii) $a_{n+1} \leq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ | (calcolo di sopra) |
| | (iii) $a_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$ | (solito) |
| | (iv) $l = 3$ | (passaggio al limite) |

ANALISI MATEMATICA 1 - LEZIONE 068

Titolo nota

16/11/2012

$$a_{n+1} = \frac{2a_n + 3n}{n+4} \quad a_0 = 2012$$

Supponiamo di sapere (al termine del p.to (iii)) che $a_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$.

Come si conclude che $l = 3$?

Dim.

$$a_{n+1} = \frac{2a_n + 3n}{n+4} = \frac{\cancel{n} \left(\frac{2a_n}{\cancel{n}} + 3 \right)}{\cancel{n} \left(1 + \frac{4}{\cancel{n}} \right)}$$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
 l $=$ 3
 $\text{---} \text{---} \text{---}$

Esempio 1

$$a_1 = 2012$$

$$a_{n+1} = \sqrt[n]{7 + a_n}$$

$$a_1 = 2012, \quad a_2 \stackrel{n=1}{=} 2.019, \quad a_3 \stackrel{n=2}{=} \sqrt{2.026} = 40 + q.c., \quad a_4 = \sqrt[3]{47 + q.c.} = 3, \dots$$

Oss. Se $a_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$, allora $l = 1$. Infatti

$$a_{n+1} = \sqrt[n]{7 + a_n} = (7 + a_n)^{\frac{1}{n}} \rightarrow (7 + l)^0 = 1$$

PIANO

(i) $1 \leq a_n \leq 10.000$ per ogni $n \geq 1$

(ii) $a_n \rightarrow 1$

Dim. di (i) Induzione $n=1 \rightarrow$ Banale

Passo induttivo

Ipotesi: $1 \leq a_n \leq 10.000$ Tesi: $1 \leq a_{n+1} \leq 10.000$

$$\begin{array}{cccc} \text{spero} & \text{Hp} & \text{Hp} & \text{spero} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 \leq \sqrt[n]{8} & \leq \sqrt[n]{7 + a_n} & \leq \sqrt[n]{10.007} & \leq 10.000 \\ & a_{n+1} & & \end{array}$$

Speranza 1: $\sqrt[n]{8} \geq \sqrt[n]{1} = 1$ Ok

Speranza 2: falsa per $n=1$, ma per $n \geq 2$ si ha

$$\sqrt[n]{10.007} \leq \sqrt[2]{10.007} = 100 + \text{poco} \leq 10.000 \quad \text{Ok per } n \geq 2.$$

1 2 3 4 5

Quindi DOBBIAMO CONTROLLARE A MANO IL CASO $n=2$, cioè

$$1 \leq a_2 \leq 10.000 \quad \text{quindi ok.}$$

" 2019

Dim (i) Dal pto (i) sappiamo che

$$\sqrt[n]{8} \leq a_{n+1} \leq \sqrt[n]{10.000}$$

↓ ↓ ↓
1 1 1

Come al solito $a_{n+1} \rightarrow 1$, quindi anche $a_n \rightarrow 1$.

Esempio 2 $a_1 = \frac{2}{3}$ $a_{n+1} = \frac{a_n^3}{n^2}$ Idea: $a_n \rightarrow 0$

PIANO (i) $0 \leq a_n \leq 1$ per ogni $n \geq 1$
(ii) $a_n \rightarrow 0$

Dim (i) Induzione $n \geq 1$ banale

Passo induttivo: ipotesi: $0 \leq a_n \leq 1$ tesi: $0 \leq a_{n+1} \leq 1$

Dim. Prendo l'ipotesi: $0 \leq a_n \leq 1$

elevo al cubo (che è crescente nella zona $[0,1]$): $0 \leq a_n^3 \leq 1$

Divido per n^2 (posso perché ...)

$$\frac{0}{n^2} \leq \frac{a_n^3}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$$

" "

$$0 \leq a_{n+1} \leq \frac{1}{n^2} \leq 1 \quad \text{che è la tesi}$$

↑
ovvio

Dim (ii) Dal pto (i) sappiamo che

$$0 \leq a_{n+1} \leq \frac{1}{n^2}$$

↓ ↓ ↓
0 0 0

Solita conclusione.

ALTERNATIVA CON MONOTONIA

(i) $0 \leq a_n \leq 1$ per ogni $n \geq 1$ (come sopra)

(ii) $a_{n+1} \leq a_n$ " " "

(iii) $a_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$ (solito)

(iv) $l=0$

Dim. (i) Per induzione $n=1$ $a_2 \leq a_1$, cioè si calcolano a_1 e a_2
 $\frac{8}{2^2} \leq \frac{2}{3}$ ok

Passo induttivo Ipotesi: $a_{n+1} \leq a_n$ Tesi: $a_{n+2} \leq a_{n+1}$

Dim. $a_{n+2} = \frac{a_{n+1}^3}{(n+1)^2} \leq \frac{a_n^3}{(n+1)^2} \leq \frac{a_n^3}{n^2} = a_{n+1}$

$\uparrow$ ricon. $\uparrow$ uso Hp + monotonia di x^3 $\uparrow$ denom. più piccolo

Dim. (ii) Passo al limite nella riconvergenza

$$a_{n+1} = \frac{a_n^3}{n^2} \rightarrow \frac{0^3}{+\infty} = 0$$

— 0 — 0 —

Esempio 3 $a_{n+1} = \frac{a_n^3}{n^2}$ $a_1 = 2$

Se $a_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$, allora $l = 0$ (pto (iv) di prima)

L'idea è che $a_n \rightarrow +\infty$: $a_1 = 2$, $a_2 = 8$, $a_3 = \frac{8^3}{2^2} = 2^7 = 128$

Provo a dimostrare che a_n è crescente: $a_{n+1} \geq a_n \Leftrightarrow \frac{a_n^3}{n^2} \geq a_n$

$$\Leftrightarrow a_n^3 \geq n^2 a_n \Leftrightarrow a_n (a_n^2 - n^2) \geq 0 \Leftrightarrow \underbrace{a_n}_{\geq 0} \underbrace{(a_n + n)}_{\geq 0} (a_n - n) \geq 0$$

Per dimostrare che $a_{n+1} \geq a_n$, sembra servire che $a_n \geq n$. Mi serve quindi un p.to (i) del piano che dica che $a_n \geq n$.

Dimostrando per induzione il p.to (i) mi troverei con

Ipotesi: $a_n \geq n$ Tesi: $a_{n+1} \geq n+1$ e nella dim. avrei che

$$a_{n+1} = \frac{a_n^3}{n^2} \geq \frac{n^3}{n^2} = n \geq n+1$$

$\uparrow$ Hp $\uparrow$ spero ☹️

PIANO (i) $a_n \geq n^2$ per ogni $n \geq 1$
 (ii) $a_n \rightarrow +\infty$

Dim (ii) Prendo il p.to (i) e passo al limite concludendo per confronto a 2.

$$\begin{array}{ccc} a_n & \geq & n^2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ +\infty & & +\infty \end{array}$$

Dim (i) Per induzione: $n=1$ ok $a_1 \geq 1$

Passo induttivo: Ipotesi: $a_n \geq n^2$ Tesi: $a_{n+1} \geq (n+1)^2$

$$\text{Dim. } a_{n+1} = \frac{a_n^3}{n^2} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ricor.}}}{\geq} \frac{n^6}{n^2} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Hp}}}{=} n^4 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{spero}}}{\geq} (n+1)^2$$

Controllo la speranza, cioè se $n^4 \geq (n+1)^2$?

È chiaro che è vero definitivamente, ma questo NON BASTA

$n^4 \geq n^2 + 2n + 1$ e questo si può dimostrare o studiando la funzione oppure verificando a mano per $n=1$ e $n=2$ e poi

$$n^4 = n^2 \cdot n^2 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{se } n \geq 2}}{\geq} 4n^2 = n^2 + 2n^2 + n^2 \geq n^2 + 2n + 1$$

Il problema è FARSI VENIRE IN MENTE IL PIANO.

ANALISI MATEMATICA 1 - LEZIONE 069

Titolo nota

16/11/2012

Esercizio 1 $a_{n+1} = \log(1 + na_n)$ $a_1 = 2$

$$a_1 = 2 \quad \begin{matrix} n=1 \\ \downarrow \end{matrix} a_2 = \log(1 + 1 \cdot a_1) = \log 3 = 1, \dots \quad \begin{matrix} n=2 \\ \downarrow \end{matrix} a_3 = \log(1 + 2a_2) = \log(3, \dots) = 1, \dots$$

PIANO (i) $a_n \geq 1$ per ogni $n \geq 1$
 (ii) $a_n \rightarrow +\infty$

Dim (i) Induzione $n=1$ ok $a_1 \geq 1$

Passo induttivo: Ipotesi: $a_n \geq 1$ Tesi: $a_{n+1} \geq 1$

$$\text{Dim. } a_{n+1} = \log(1 + na_n) \geq \log(1 + n) \geq 1$$

$\uparrow$ ricom. $\uparrow$ uso Hp + monotonia di log $\uparrow$ spero

Speranza ok se $1+n \geq e$, cioè se $n \geq 2$. Questo dice che devo controllare anche il passo base $n=2$, cioè $a_2 \geq 1$ che ho fatto all'inizio.

Dim (ii) Dal pto (i) sappiamo che $a_{n+1} \geq \log(1+n)$

$\downarrow +\infty$ $\downarrow +\infty$

Per confronto abbiamo che $a_{n+1} \rightarrow +\infty$, quindi anche $a_n \rightarrow +\infty$.

— 0 — 0 —

Esempio 2 $a_0 = 2012$ $a_{n+1} = 37 + \frac{n^{20} + 5}{2^n} a_n$

È abbastanza chiaro che $a_n \rightarrow 37$ (si vede che se $a_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$, allora di sicuro $l = 37$).

PIANO: LIM+CAR(i) $0 \leq a_n \leq q.c.$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ (ii) $a_n \rightarrow 37$ **Dim (ii)** Dal p.to (i) sappiamo che

$$37 \leq a_{n+1} \leq 37 + \frac{n^{20}+5}{2^n} q.c.$$

$\downarrow$ 37 $\downarrow$ 37 $\downarrow$ 37

Solito finale.

Problema: trovare q.c. che faccia funzionare il p.to (i). La parte $a_n \geq 0$ è una banale induzione. Il problema è $a_n \leq q.c.$

Chiamiamo q.c. = M. Al passo induttivo mi trovo

Ipotesi: $a_n \leq M$ Tesi: $a_{n+1} \leq M$

$$a_{n+1} = 37 + \frac{n^{20}+5}{2^n} a_n \leq 37 + \frac{n^{20}+5}{2^n} M \leq M$$

$\uparrow$ ric. $\uparrow$ uso Hp $\uparrow$ spero

La speranza può essere vera solo dopo che il coeff. $\frac{n^{20}+5}{2^n}$ è diventato piccolo, e nel frattempo bisogna controllare a mano tutti i passi base fino a lì.

Via d'uscita: esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $\frac{n^{20}+5}{2^n} \leq \frac{1}{2}$ per ogni $n \geq n_0$

Buio $M = a_0 + a_1 + \dots + a_{n_0} + 74$. Dico che $a_n \leq M$ per ogni $n \in \mathbb{N}$

Dim. Per induzione. Passi base: $n=0, 1, 2, \dots, n_0$. È evidente che

$a_k \leq M$ per ogni $k \leq n_0$ (infatti M è la somma di tutti i termini fino ad n_0)

Passo induttivo: Ipotesi: $a_n \leq M$ Tesi: $a_{n+1} \leq M$

$$\text{Dim. } a_{n+1} = 37 + \frac{n^{20}+5}{2^n} a_n \leq 37 + \frac{n^{20}+5}{2^n} M \leq M$$

$\downarrow$ ric. $\downarrow$ Hp $\downarrow$ spero

Controllo la speranza per $n \geq n_0$. Ho che

$$37 + \frac{n^{20}+5}{2^n} M \leq 37 + \frac{1}{2} M \stackrel{?}{\leq} M \quad \text{vero} \Leftrightarrow \frac{1}{2} M \geq 37 \Leftrightarrow M \geq 74$$

questo è vero perché in M c'è 74 come addendo

Oss. Se definivo m_0 imponendo $\frac{m^2+5}{2^m} \leq \frac{9}{10}$, mi sarei trovato

$$37 + \frac{9}{10} M \leq M, \text{ che è vero } \Leftrightarrow 37 \leq \frac{1}{10} M \Leftrightarrow M \geq 370,$$

quindi era utile aggiungere 370 nella def. di M .

Esercizio 3 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log n}{n^2}$ $\frac{\log n}{n^2}$ $a_n \rightarrow 0$ quindi può convergere.
"a_n"

Confronto asintotico con $b_n = \frac{1}{n^2}$.

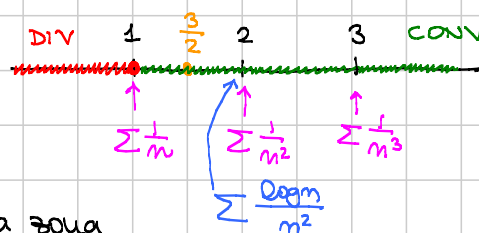
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log n}{n^2} \cdot n^2 = +\infty \rightarrow \text{caso limite}$$

[$\frac{a_n}{b_n} \rightarrow +\infty$, quindi definitivamente $\frac{a_n}{b_n} \geq 1$, quindi $a_n \geq b_n$]

Ora $\sum b_n = \sum \frac{1}{n^2}$ converge $\Rightarrow \sum a_n$ Bol!!

[Esercizio : provare il confronto asintotico con $b_n = \frac{1}{n}$... viene $a_n \leq b_n$ definitiv. $\sum b_n = +\infty \Rightarrow$ bol!!].

Idea : $\frac{\log n}{n^2} \geq \frac{1}{n^2}$, quindi



è "più difficile" che converga, quindi sto andando a sx nel disegno verso la zona rossa. Essendo $\log n$ più debole delle potenze, lo spostamento è piccolo, per cui rimango in zona verde

Confronto asintotico con $b_n = \frac{1}{n^{3/2}}$.

potenza vs log.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log n}{n^2} \cdot n^{3/2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log n}{\sqrt{n}} = 0$$

$\frac{a_n}{b_n} \rightarrow 0$, quindi $\frac{a_n}{b_n} \leq 1$ defm., cioè $a_n \leq b_n$ defm.

$\sum b_n = \sum \frac{1}{n^{3/2}}$ converge $\Rightarrow \sum a_n$ converge.

Oss. Potavo usare, invece di $\frac{3}{2}$, un qualunque esponente $\alpha \in (1, 2)$
($\alpha > 1$ per avere convergenza, $\alpha < 2$ per avanzare n al denominatore
quindi avere limite 0).

— 0 — 0 —

ANALISI MATEMATICA 1 - LEZIONE 070

Titolo nota

17/11/2012

- INTEGRALI**
- Come si indicano
 - Significato geometrico
 - Come si definiscono
 - Come si calcolano

Notazioni Ingredienti degli INTEGRALI PROPRI

① Zona di integrazione: intervallo $[a, b]$, quindi un insieme limitato

② Funzione integranda: funzione $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ limitata
 cioè $\exists M$ t.c. $|f(x)| \leq M \quad \forall x \in [a, b]$

$\int_a^b f(x) dx$

simbolo di integrale (pointing to the integral symbol)

oggetto misterioso (pointing to $f(x)$)

integrandola (pointing to dx)

a e b sono gli "estremi di integrazione"

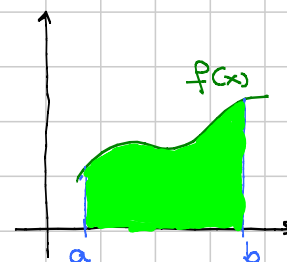
Notazioni estese: per definizione si pone

$$\int_a^a f(x) dx = 0 \quad (\text{estremi uguali})$$

$$\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx \quad (\text{estremi "al contrario"}) \quad a < b$$

Significato geometrico

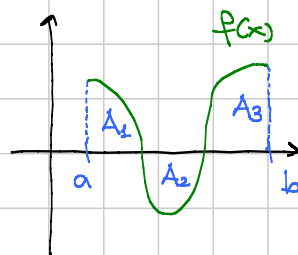
$\int_a^b f(x) dx$ è un numero che rappresenta
 l'area **CON SEGNO**
 della parte di piano compresa tra
 l'asse x ed il grafico di $f(x)$, con $x \in [a, b]$



Area con segno: parti sopra asse x contano con il segno +
 " sotto asse x contano con il segno -

Nella figura a fianco si avrebbe

$$\int_a^b f(x) dx = \text{Area}(A_1) - \text{Area}(A_2) + \text{Area}(A_3)$$

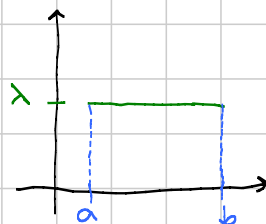


Definizione

3 PASSI $\begin{cases} \nearrow \text{Caso banale} \\ \rightarrow \text{Caso semi-banale} \\ \searrow \text{Caso generale} \end{cases}$

Caso banale $f(x) \equiv \lambda$, cioè $f(x)$ è una funzione costante che vale λ per ogni $x \in [a, b]$

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \text{area con segno del rettangolo} \\ &= \underbrace{(b-a)}_{\text{lunghezza base}} \cdot \underbrace{\lambda}_{\text{altezza con segno}} \end{aligned}$$



Caso semi-banale $f(x)$ è costante a tratti, cioè esistono numeri

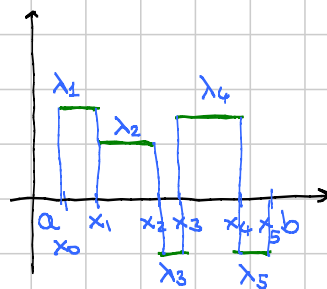
$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

ed esistono numeri $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tali che

$$f(x) = \lambda_i \text{ per ogni } x \in [x_{i-1}, x_i]$$

In questo caso

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \text{somma algebrica delle aree con segno dei vari rettangoli} \\ &= \sum_{i=1}^n \underbrace{(x_i - x_{i-1})}_{\substack{\text{lunghezza base} \\ \text{rettangolo } i\text{-esimo}}} \cdot \underbrace{\lambda_i}_{\text{altezza rettangolo } i\text{-esimo}} \end{aligned}$$



Terminologia: le funzioni di questo tipo si chiamano
funzioni semplici, o funzioni a gradino, o STEP FUNCTIONS

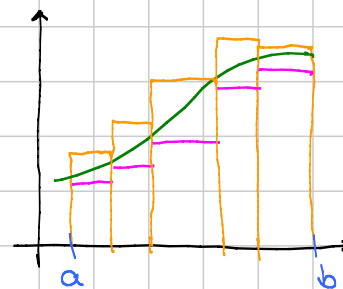
Caso generale Sia ora $f(x)$ una funzione limitata qualunque.

Definisco

→ l'integrale superiore $I^+(f, [a, b])$ e

→ l'integrale inferiore $I^-(f, [a, b])$

$I^+(f, [a, b])$ = estremo inferiore delle aree arancioni



$$= \inf \left\{ \int_a^b \varphi(x) dx : \varphi(x) \text{ è una step function e } \varphi(x) \geq f(x) \forall x \in [a, b] \right\}$$

$\int_a^b$ ← integrale scrivibile

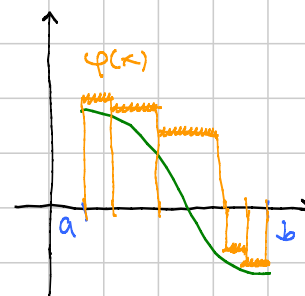
Oss. Per andare verso l'inf occorre rendere la suddivisione molto fitta e cercare di non sfiorare molto con le altezze.

$I^-(f, [a, b])$ = estremo superiore delle aree fucsia

$$= \sup \left\{ \int_a^b \varphi(x) dx : \varphi(x) \text{ è una step function e } \varphi(x) \leq f(x) \forall x \in [a, b] \right\}$$

Oss.1 L'ipotesi che f sia limitata garantisce l'esistenza di almeno una step function $\geq f(x)$ e almeno una $\leq f(x)$ (rettangolini che contengono l'area in questione). Questo garantisce che sto facendo sup e inf di insiemi non vuoti.

Oss.2 Occhio a cosa vuol dire $f(x) \geq \varphi(x)$ e $f(x) \leq \varphi(x)$ nel caso in cui $f(x)$ non ha segno costante. Si scambiano "contenere" ed "essere contenuti".



Teorema Per ogni funzione limitata $f(x)$ si ha che l'integrale superiore ed inferiore esistono per forza. (sono sup e inf)
Inoltre

$$I^-(f; [a, b]) \leq I^+(f; [a, b])$$

Def. Si dice che $f(x)$ è INTEGRABILE SECONDO RIEMANN nell'intervallo $[a, b]$ se

$$I^-(f; [a, b]) = I^+(f; [a, b])$$

Oss. In generale tutti gli elementi che intervengono nella def. di I^+ sono $\geq$ di quelli che intervengono nella def. di I^- .

In tal caso si pone

$$\int_a^b f(x) dx = I^+(f, [a, b]) = I^-(f, [a, b])$$



Vuol dire che nel disegno le due zone "si toccano".

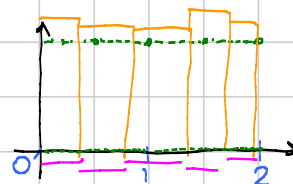
ANALISI MATEMATICA 1 - LEZIONE 071

Titolo nota

17/11/2012

Esempio in cui $I^+ > I^-$ Sia $[a, b] = [0, 2]$ e sia

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$



Il grafico è "INDISEGNABILE".

Le somme di Riemann superiori, cioè gli integrali corrispondenti a $\varphi(x)$ a gradino $\geq f(x)$, sono tutte ≥ 2 (perché $\varphi(x)$ deve essere ≥ 1 in tutto $[0, 2]$).

Analogamente le somme di Riemann inferiori sono tutte ≤ 0 .

Quindi in questo esempio si ha che

$$I^+(f; [0, 2]) = 2, \quad I^-(f; [0, 2]) = 0$$

Teorema Si ha che $I^+ = I^-$, e dunque la funzione è integrabile, in tutti questi casi

- ① Se la funzione è monotona
- ② Se la funzione è continua
- ③ Se la funzione è continua a tratti, cioè è continua ovunque tranne in un numero finito di punti.

Proprietà dell'integrale

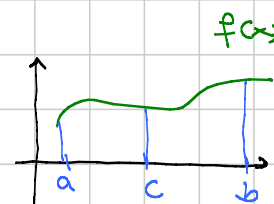
$$\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

$$\int_a^b \lambda f(x) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx$$

$$\int_a^b f(x) \cdot g(x) dx = \text{Nullo di furbo}$$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

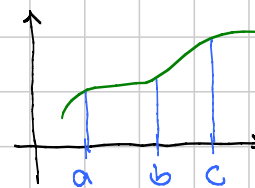
L'integrale è un'applicazione LINEARE (da dove a dove?)



Oss. Se c è esterno all'intervallo $[a, b]$, vale ancora la formula precedente

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x) dx &= \int_a^c f(x) dx - \int_b^c f(x) dx \\ &= \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx\end{aligned}$$

↑ estremi invertiti: vedi accordo iniziale

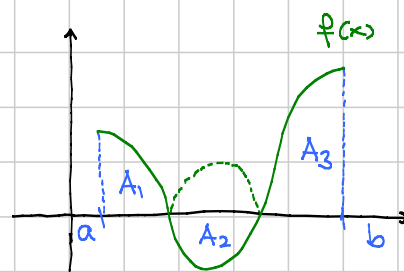


L'accordo è giustificato dall'aver la stessa formula (additività rispetto alla zona di integrazione) senza porsi il problema se $c \in [a, b]$ oppure no.

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

$$\int_a^b f(x) dx = \text{Area}(A_1) - \text{Area}(A_2) + \text{Area}(A_3)$$

$$\int_a^b |f(x)| dx = \text{Area}(A_1) + \text{Area}(A_2) + \text{Area}(A_3)$$



La formula dice che $|A_1 - A_2 + A_3| \leq A_1 + A_2 + A_3$

Tutte le proprietà enunciate si dimostrano prima nel caso banale, poi per le step functions, poi nel caso generale facendo sup e inf.

Criterio di integrabilità Una funzione $f(x)$ è integrabile secondo Riemann se e solo se esistono 2 funzioni a gradino $\varphi_1(x)$ e $\varphi_2(x)$ b.c. $\forall \varepsilon > 0$

$$\varphi_1(x) \leq f(x) \leq \varphi_2(x) \quad \forall x \in [a, b]$$

e

$$\int_a^b (\varphi_2(x) - \varphi_1(x)) dx \leq \varepsilon$$

Inoltre posso supporre che φ_1 e φ_2 arrivino dalla stessa suddivisione di $[a, b]$.

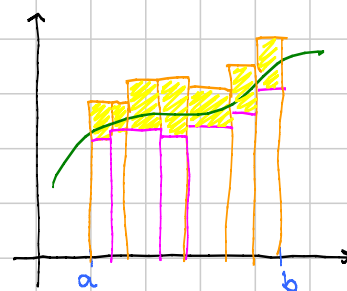
Dim.

↓ ↓ ← distanza $\leq \varepsilon$
 $I^- = I^+$

Se $I^- = I^+$, vuol dire che per ogni $\varepsilon > 0$ trovo una somma superiore ed una somma inferiore la cui distanza è $\leq \varepsilon$.

Ora

$$\int_a^b \underbrace{p_2(x)}_{\text{funzione sopra}} dx - \int_a^b \underbrace{p_1(x)}_{\text{funzione sotto}} dx = \text{area in mezzo (gialla in figura)} \leq \varepsilon.$$



Bruttalmente: $f(x)$ è integrabile $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ esistono rettangoli sopra e sotto con l'intercapedine che ha area $\leq \varepsilon$.

— o — o —

Dim. che le funzioni monotone (anche non continue) sono integrabili.

Basta trovare $p_1(x)$ e $p_2(x)$ come prima.

Divido $[a, b]$ in n parti uguali.

Poi posso pensare di sovrapporre tutte le intercapedini in modo da formare un rettangolo che ha base di lung. $\frac{b-a}{n}$ e altezza $f(b) - f(a)$.

Quindi la somma delle intercapedini è

$$(f(b) - f(a)) \cdot \frac{b-a}{n}$$

e questo diventa piccolo a piacere per di prendere n grande.

— o — o —

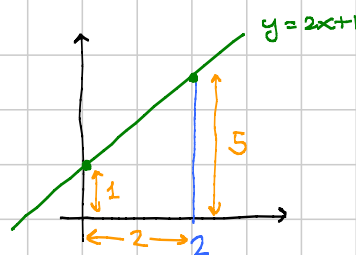


Esempio 1 $\int_0^2 (2x+1) dx$

= area trapezoido

= $\frac{1}{2}$ somma basi $\cdot$ altezza

$$= \frac{1}{2} (1+5) \cdot 2 = 6$$

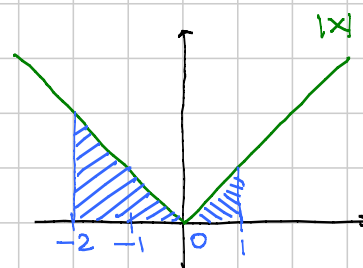


Esempio 2 $\int_{-2}^1 |x| dx$

[Evitare cose creative stile |primitiva|]

$$\int_{-2}^1 |x| dx = \text{somma aree di 2 triangoli}$$

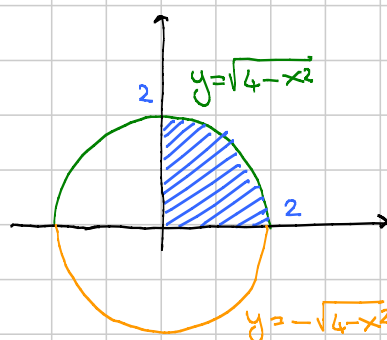
$$= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$



Esempio 3 $\int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx$

grafico di $f(x) = \sqrt{4-x^2}$

$$y = \sqrt{4-x^2}, \quad y^2 = 4-x^2, \quad x^2+y^2 = 4$$



$$\int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx = \text{Area di } \frac{1}{4} \text{ di cerchio}$$

$$= \frac{1}{4} \pi R^2 = \frac{1}{4} \pi \cdot 4 = \pi$$

ANALISI MATEMATICA 1 - LEZIONE 072

Titolo nota

17/11/2012

Come si calcolano gli integraliDef. Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua.Si dice che $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è una PRIMITIVA di $f(x)$ se

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a, b]$$

Oss. La primitiva, posto che esista, non è mai unica. Infatti: se $F(x)$ è una primitiva, anche $F(x) + c$ è una primitiva.Tecnica di calcolo degli integrali Sia $F(x)$ una qualunque primitiva di $f(x)$ su $[a, b]$. Allora per ogni intervallo $[c, d] \subseteq [a, b]$ si ha che

$$\int_c^d f(x) dx = F(d) - F(c)$$

Notazione $F(d) - F(c) = [F(x)]_c^d = [F(x)]_{x=c}^{x=d}$ Oss. Grazie a questa tecnica, il calcolo degli integrali è ridotto al calcolo di una primitiva qualunque, cioè dell'operazione inversa rispetto alla derivata (in inglese: primitiva = ANTIDERIVATIVE)1° PASSO Il valore di $F(d) - F(c)$ non dipende dalla primitiva che consideroLemma fondamentale Se $F_1(x)$ e $F_2(x)$ sono due primitive di $f(x)$ nello stesso intervallo $[a, b]$, allora $F_1(x) - F_2(x)$ è una funzione costante.

Dim. Dimostro che $F_1(x) - F_2(x)$ ha lo stesso valore che nell'estremo a . Detto meglio: posso $G(x) = F_1(x) - F_2(x)$ e faccio vedere che

$$G(x) = G(a) \quad \text{per ogni } x \in [a, b]$$

$$\begin{aligned} \text{Osservo intanto che } G'(x) &= F_1'(x) - F_2'(x) \\ &= f(x) - f(x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$G(x) - G(a) = G'(c) \cdot (x-a) = 0$$

↑
Lagrange

— a — 0 —

Dato per buono il lemma, se $F_1(x)$ e $F_2(x)$ sono 2 primitive della stessa $f(x)$, allora $F_2(x) - F_1(x) = \alpha$ costante, quindi

$$F_2(x) = F_1(x) + \alpha, \text{ quindi}$$

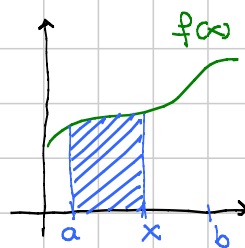
$$\begin{aligned} [F_2(x)]_c^d &= F_2(d) - F_2(c) = [F_1(d) + \alpha] - [F_1(c) + \alpha] \\ &= F_1(d) + \cancel{\alpha} - F_1(c) - \cancel{\alpha} \\ &= F_1(d) - F_1(c) \\ &= [F_1(x)]_c^d \end{aligned}$$

— 0 — 0 —

2° PASSO Consideriamo la FUNZIONE INTEGRALE

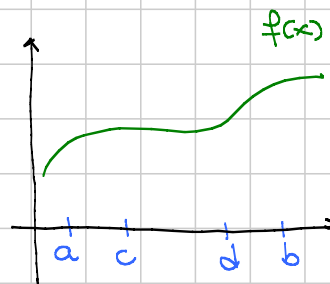
Per ogni $x \in [a, b]$, posso calcolare l'integrale tra a e x .

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= \int_a^x f(t) dt \\ \uparrow & \quad \quad \quad \uparrow \\ \text{Funzione} & \quad \quad \quad \text{variabile di integrazione} \\ \text{integrale} & & \end{aligned}$$



A cosa serve la funzione integrale?

$$\begin{aligned} \int_c^d f(x) dx &= \int_a^d f(x) dx - \int_a^c f(x) dx \\ &= \Phi(d) - \Phi(c) = [\Phi(x)]_c^d \end{aligned}$$



3° PASSO Se dimostro che $\Phi(x)$ è una primitiva di $f(x)$, allora ho finito, cioè ho dimostrato che

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b$$

↑
primitiva

Resta da dimostrare che $\Phi'(x) = f(x)$.

Teorema 1 (teorema della media integrale).

Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione integrabile e continua. Siano Allora $\exists c \in [a, b]$ t.c.

$$\int_a^b f(x) dx = \underbrace{f(c)}_{\substack{\text{valore in} \\ \text{p.to misterioso}}} \underbrace{(b-a)}_{\substack{\text{ampiezza} \\ \text{intervallo}}}$$

Dim. Siano

$$m = \min \{ f(x) : x \in [a, b] \}$$

$$M = \max \{ f(x) : x \in [a, b] \}$$

Allora

$$\underbrace{m(b-a)}_{\substack{\uparrow \\ \text{area rett. con} \\ \text{base } [a, b] \text{ e altezza } m}} \leq \int_a^b f(x) dx \leq \underbrace{M(b-a)}_{\substack{\uparrow \\ \text{area rettangolo con base} \\ [a, b] \text{ ed altezza } M}}$$

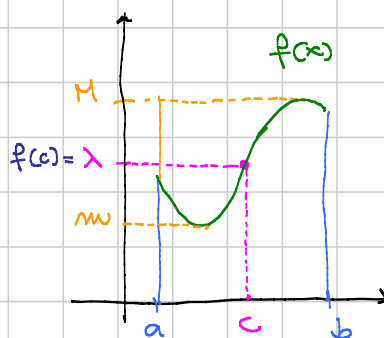
Allora dividendo:

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M$$

numero λ compreso tra m ed M

Per il teo. di esistenza degli zeri e varianti si ha che $\exists c \in (a, b)$ tale che $f(c) = \lambda$, cioè

$$f(c) = \frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(x) dx. \quad \text{Moltiplicando si ha la tesi}$$



Teorema 2 (Teo. fondamentale del calcolo integrale)

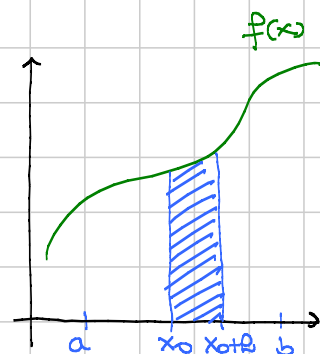
La funzione integrale è una primitiva di $f(x)$, cioè

$$\Phi(x) = f(x) \quad \forall x \in [a, b]$$

Dim. Voglio dim. che $\Phi'(x_0) = f(x_0)$.

Punto del rapporto incrementale

$$\begin{aligned} \frac{\Phi(x_0+h) - \Phi(x_0)}{h} &= \frac{1}{h} \left\{ \Phi(x_0+h) - \Phi(x_0) \right\} \\ &= \frac{1}{h} \left\{ \int_a^{x_0+h} f(x) dx - \int_a^{x_0} f(x) dx \right\} \\ &= \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(x) dx = \frac{1}{\cancel{h}} \cdot \overset{\text{ampiezza intervallo}}{h} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{p.to misterioso in } [x_0, x_0+h]}}{f(c)} \\ &= f(c) \quad (\text{ad essere preciso dovei scrivere } f(c_h)) \end{aligned}$$



Facendo il limite

$$\begin{aligned} \Phi'(x_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Phi(x_0+h) - \Phi(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} f(c_h) \\ &= f(x_0) \end{aligned}$$

perché

$$\boxed{x_0} \leq \boxed{c_h} \leq \boxed{x_0+h}$$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
 x_0 x_0 x_0

ANALISI MATEMATICA 1 - LEZIONE 073

Titolo nota

21/11/2012

Per calcolare $\int_a^b f(x) dx$, se $f(x)$ è continua cerco una funzione $F(x)$ tale che $F'(x) = f(x)$ per ogni $x \in [a, b]$. A questo punto

UNA
primitiva

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = [F(x)]_{x=a}^{x=b} = F(b) - F(a)$$

Tecniche di integrazione: data $f(x)$, trovare $F(x)$

- Primitive elementari
- Integrazione PER PARTI
- Integrazione PER SOSTITUZIONE
- Integrazione FUNZIONI RAZIONALI
- Sostituzioni razionalizzanti

PRIMITIVE ELEMENTARI Notazione: INTEGRALE INDEFINITO (senza estremi)

$\int f(x) dx =$ una qualunque primitiva

$$\int 2x dx = x^2$$

$$\int 1 dx = x$$

$$\int e^x dx = e^x$$

$$\int \cos x dx = \sin x$$

$$\int \sin x dx = -\cos x$$

$$\int x^k dx = \frac{1}{k+1} x^{k+1}$$

$$\int \cos R x dx = \sin R x$$

$$\int \sin R x = -\cos R x$$

$$\int a^x dx = \frac{1}{\log a} a^x$$

$$\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1}$$

OK per ogni $\alpha \neq -1$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \log x \quad \text{OK per } x > 0$$

Oss. È vero che $(\log x)' = \frac{1}{x}$ per ogni $x > 0$

Ancora meglio $\int \frac{1}{x} dx = \log|x|$ Ok per $x \neq 0$.

Infatti per $x > 0$ è quella di prima. Per $x < 0$ abbiamo che

$$\log|x| = \log(-x) \quad \text{quindi} \quad (\log|x|)' = (\log(-x))' = \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x}$$

Oss. Per controllare che $F(x)$ sia effettivamente una primitiva di $f(x)$ basta fare la derivata. Questa è una dim. completa dell'essere una primitiva.

— o — o —

Discorso del +c $\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + c$

In questo caso l'espressione $\frac{1}{3}x^3 + c$ rappresenta, al variare del parametro $c \in \mathbb{R}$, l'insieme di tutte le primitive di x^2 .

Però NON è sempre così. Se scrivo

$\int \frac{1}{x} dx = \log|x| + c$ NON ho scritto l'insieme di tutte le primitive. In questo esempio l'insieme di definizione di $\frac{1}{x}$ è fatto da 2 pezzi: $(-\infty, 0)$ e $(0, +\infty)$. Posso quindi usare "c diversi su pezzi diversi". Per esempio

$$F(x) = \begin{cases} \log x + 5 & \text{per } x > 0 \\ \log(-x) + 8 & \text{per } x < 0 \end{cases}$$

ho ottenuto una primitiva di $\frac{1}{x}$

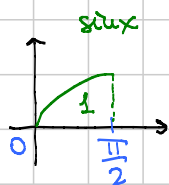
Qual è il senso del +c ?

- ① Per il calcolo esplicito di un integrale su un intervallo NON SERVE (si semplifica quando faccio $[F(x)]_a^b$)
- ② Per descrivere l'insieme di tutte le primitive NON BASTA, almeno se l'insieme di definizione è fatto da più pezzi.

Quindi inutile metterlo.

— o — o —

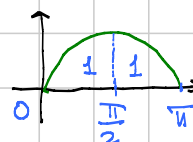
Esempio 1 $\int_0^{\pi/2} \sin x \, dx = \left[-\cos x \right]_0^{\pi/2} = \underbrace{-\cos \frac{\pi}{2}}_{F(b)} - \underbrace{(-\cos 0)}_{F(a)} = 0 - (-1) = 1.$



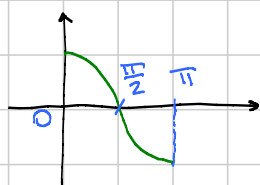
Achtung! L'integrale di una funzione $f(x) \geq 0$ e non identicamente nulla NON PUÒ VENIRE ≤ 0 . Quindi se viene -1 e uno non se ne accorge NON È UN ERRORE DI CALCOLO !!!

Esempio 2 $\int_0^{\pi} \sin x \, dx = \left[-\cos x \right]_0^{\pi} = -\cos \pi - (-\cos 0) = -(-1) - (-1) = 2$

Si poteva vedere anche "geometricamente"



Esempio 3 $\int_0^{\pi} \cos x \, dx = \left[\sin x \right]_0^{\pi} = \sin \pi - \sin 0 = 0 - 0 = 0$



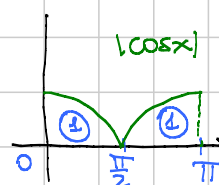
Geometricamente: le 2 aree sono uguali e si compensano (una con il segno +, una con il segno -).

Esempio 4 $\int_{\pi/2}^{\pi} \cos x \, dx = \left[\sin x \right]_{\pi/2}^{\pi} = \sin \pi - \sin \frac{\pi}{2} = 0 - 1 = -1$

Il fatto che venga -1 ($0 - 1$) è consistente con il fatto che il grafico di $\sin x$ e $\cos x$ si ottengono l'uno dall'altro per traslazione.

Esempio 5 $\int_0^{\pi} |\cos x| \, dx$ EVITARE COSE CREATIVE TIPO $\int |\cos x| \, dx = |\sin x|$ o simili

Geometricamente si vede che viene 2



Algebricamente bisogna spezzare le zone

$$|\cos x| = \begin{cases} \cos x & \text{per } x \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ -\cos x & \text{per } x \in [\frac{\pi}{2}, \pi] \end{cases} \quad \text{quindi}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} |\cos x| dx &= \int_0^{\pi/2} |\cos x| dx + \int_{\pi/2}^{\pi} |\cos x| dx \\ &= \int_0^{\pi/2} \cos x dx + \int_{\pi/2}^{\pi} (-\cos x) dx = \int_0^{\pi/2} \cos x dx - \int_{\pi/2}^{\pi} \cos x dx \end{aligned}$$

da qui in poi si può procedere con le primitive,

Achtung! Nel calcolare $\int_a^b |f(x)| dx$, posso far entrare in gioco le primitive solo dopo aver spezzato le zone.

Esempio 6 $\int e^{2x} dx = \frac{1}{2} e^{2x} \quad \int \cos(5x) dx = \frac{1}{5} \sin(5x)$

$$\int e^{-3x} dx = -\frac{1}{3} e^{-3x} \quad \int \frac{1}{2x} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{x} dx = \frac{1}{2} \log|x| = \log \sqrt{|x|}$$

$$\int \frac{1}{x^5} dx = \int x^{-5} dx = \frac{1}{-5+1} x^{-5+1} = -\frac{1}{4} x^{-4} = -\frac{1}{4} \frac{1}{x^4}$$

$$\int 2^{7x} dx = \frac{1}{7 \log 2} 2^{7x} \quad \left[\frac{1}{7 \log 2} \cdot 2^{7x} \right]' = \frac{1}{7 \log 2} \cdot 2^{7x} \cdot \log 2 \cdot 7$$

$$\int \frac{1}{3^x} dx = \int 3^{-x} dx = -\frac{1}{\log 3} \cdot 3^{-x}$$

$$\int \cos(x+5) dx = \sin(x+5)$$

$$\int \sin(3x+4) dx = \frac{1}{3} [-\cos(3x+4)] = -\frac{1}{3} \cos(3x+4).$$

ANALISI MATEMATICA 1 - LEZIONE 074

Titolo nota

21/11/2012

INTEGRAZIONE PER SOSTITUZIONE

Formula fondamentale

$$\int_a^b [\Phi'(x)] dx = [\Phi(x)]_a^b$$

L'integrale di una derivata è la funzione stessa valutata tra gli estremi

Uso questa formula con $\Phi(x) = F(G(x))$. Per comodità pongo $G'(x) = g(x)$, $F'(x) = f(x)$.

Per la derivata della funzione composta abbiamo che

$$\Phi'(x) = F'(G(x)) \cdot G'(x) = f(G(x)) g(x), \text{ quindi}$$

$$\int_a^b \Phi'(x) dx = \int_a^b f(G(x)) g(x) dx$$

$$[\Phi(x)]_a^b = [F(G(x))]_a^b = F(G(b)) - F(G(a))$$

$$= [F(x)]_{G(a)}^{G(b)} = \int_{G(a)}^{G(b)} f(x) dx$$

uso nuovamente la formula fondamentale

Uguagliando il 1° e l'ultimo ottengo

$$\int_a^b f(G(x)) g(x) dx = \int_{G(a)}^{G(b)} f(x) dx$$

Formulo di INTEGRAZIONE PER SOSTITUZIONE

Supponiamo di voler calcolare $\int_a^b f(G(x)) g(x) dx$. Pongo $y = G(x)$.

Quando $x = a$ ho che $y = G(a)$

" $x = b$ ho che $y = G(b)$

$$\frac{dy}{dx} = G'(x) = g(x)$$

↑
derivata di y
rispetto ad x

$$\frac{dy}{dx} = g(x) \quad dy = g(x) dx$$

$$\int_{G(a)}^{G(b)} f(G(x)) g(x) dx = \int_{G(a)}^{G(b)} f(y) dy = \int_{G(a)}^{G(b)} f(x) dx$$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
 $f(y)$ dy

Quindi il procedimento brutale riproduce lo stesso risultato ottenuto rigorosamente.

Lo stesso discorso vale per gli integrali indefiniti.

Esempio 1 $\int x^2 \cos(x^3) dx$

Pongo $y = x^3$. Allora

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2, \text{ cioè } dy = 3x^2 dx$$

$$= \frac{1}{3} \int \cos(x^3) \cdot 3x^2 dx$$

ritorno in x

$$= \frac{1}{3} \int \cos y dy = \frac{1}{3} \sin y = \frac{1}{3} \sin(x^3) \quad \text{Derivare per verifica!}$$

Esempio 2 $\int x^5 e^{-x^6} dx$

Pongo $y = x^6$. Allora

$$\frac{dy}{dx} = 6x^5, \text{ cioè } dy = 6x^5 dx$$

$$= \frac{1}{6} \int e^{-x^6} \cdot 6x^5 dx$$

$$= \frac{1}{6} \int e^{-y} dy = -\frac{1}{6} e^{-y} = -\frac{1}{6} e^{-x^6}$$

Esempio 3 $\int \sin x \cdot e^{\cos x} dx$

Pongo $y = \cos x$. Allora

$$\frac{dy}{dx} = -\sin x, \text{ cioè } dy = -\sin x dx$$

$$= - \int e^{\cos x} (-\sin x) dx$$

$$= - \int e^y dy = -e^y = -e^{\cos x}$$

Esempio 4 $\int \frac{x}{1+x^2} dx$

Pongo $y = 1+x^2$. Allora
 $\frac{dy}{dx} = 2x$, cioè $dy = 2x dx$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{1}{1+x^2} \cdot 2x dx$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{1}{y} \cdot dy = \frac{1}{2} \log |y| = \frac{1}{2} \log |1+x^2| = \frac{1}{2} \log (1+x^2)$$

Invece $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x$. Basta cambiare poco l'integranda per avere primitive molto diverse.

Esempio 5 $\int \frac{ax+b}{1+x^2} dx = a \int \frac{x}{1+x^2} dx + b \int \frac{1}{1+x^2} dx$

$$= \frac{a}{2} \log (1+x^2) + b \arctan x$$

Esempio 6 $\int \frac{1}{2+x^2} dx = \int \frac{1}{2 \left(1 + \frac{x^2}{2}\right)} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2} dx$

Pongo $y = \frac{x}{\sqrt{2}}$, quindi $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, cioè $dy = \frac{dx}{\sqrt{2}}$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{1}{1+y^2} \cdot dy = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan y$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \arctan \frac{x}{\sqrt{2}}$$

Allo stesso modo:

$$\int \frac{1}{a+x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \arctan \frac{x}{\sqrt{a}} \quad \forall a > 0$$

TABELLINA

Esempio 7 $\int \frac{\log^3 x}{x} dx$

Pongo $y = \log x$. Allora $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$

$$= \int \log^3 x \cdot \frac{1}{x} dx$$

cioè $dy = \frac{dx}{x}$

$$= \int y^3 dy = \frac{1}{4} y^4 = \frac{1}{4} \log^4 x$$

La cosa fondamentale è che $\frac{1}{x}$ è la derivata di $\log x$

Esempio 8 $\int \frac{1}{\log^3 x \cdot x} dx$ y = log x da cui ... $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$

$$= \int \frac{1}{\log^3 x} \cdot \frac{1}{x} dx = \int \frac{1}{y^3} dy = -\frac{1}{2} \frac{1}{y^2} = -\frac{1}{2} \frac{1}{\log^2 x}$$

In generale $\int \frac{\log^\alpha x}{x} dx = \frac{1}{\alpha+1} \log^{\alpha+1} x$ se $\alpha \neq -1$

Esempio 9 Stessa cosa con $\alpha = -1$

$$\int \frac{1}{x \log x} dx = \int \frac{1}{\log x} \cdot \frac{1}{x} dx \quad \text{Come sempre } y = \log x, \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$$

$$= \int \frac{1}{y} \cdot dy = \log |y| = \log |\log x|$$

Esempio 10 $\int \frac{x}{1-x^2} dx$ Pongo $1-x^2 = y$, quindi $\frac{dy}{dx} = -2x$, cioè $dy = -2x dx$

$$= -\frac{1}{2} \int \frac{1}{1-x^2} \underbrace{(-2x) dx}_{dy} = -\frac{1}{2} \int \frac{1}{y} dy = -\frac{1}{2} \log |1-x^2|$$

$$= \log \frac{1}{\sqrt{|1-x^2|}}$$

Funzionava anche con $y = x^2$ (provarne!)

Esempio 11 $\int \frac{1}{ax+b} dx$ Pongo $y = ax+b$...

$$= \frac{1}{a} \log |ax+b|$$

— o — o —

ANALISI MATEMATICA 1 - LEZIONE 075

Titolo nota

22/11/2012

INTEGRAZIONE PER PARTI

Formula fondamentale $\int_a^b \Phi'(x) dx = [\Phi(x)]_a^b = \Phi(b) - \Phi(a)$

Prendiamo $f(x), g(x), F'(x) = f(x), G'(x) = g(x)$.

$$\Phi(x) = F(x) \cdot G(x), \text{ quindi } \Phi'(x) = F'(x) G(x) + F(x) \cdot G'(x) \\ = f(x) G(x) + F(x) \cdot g(x)$$

Sostituendo nella formula fondamentale:

$$\int_a^b [f(x) \cdot G(x) + F(x) g(x)] dx = [F(x) \cdot G(x)]_a^b$$

$$\int_a^b F(x) g(x) dx = [F(x) \cdot G(x)]_a^b - \int_a^b f(x) \cdot G(x) dx$$

Formula di INTEGRAZIONE PER PARTI UFFICIALE

$$\int F \cdot g = F \cdot G - \int f \cdot G$$

Formula un po' ABUSIVA

Esempio 1

$$\begin{aligned} \int \underset{F}{x} \underset{g}{e^{2x}} dx &= \underset{F}{x} \cdot \underset{G}{\frac{1}{2} e^{2x}} - \int \underset{f}{1} \cdot \underset{G}{\frac{1}{2} e^{2x}} dx \\ &= \frac{1}{2} x \cdot e^{2x} - \frac{1}{2} \int e^{2x} \\ &= \frac{1}{2} x \cdot e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x} \end{aligned}$$

Verifica: $(\frac{1}{2} x e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x})' = \cancel{\frac{1}{2} e^{2x}} + \frac{1}{2} x \cdot \cancel{2} e^{2x} - \frac{1}{2} \cancel{e^{2x}} = x e^{2x}$

$$\text{Esempio 2} \quad \int \underbrace{x^2}_F \underbrace{e^{-2x}}_G dx = \underbrace{x^2}_F \underbrace{\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right)}_G - \int \underbrace{2x}_F \underbrace{\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right)}_G dx$$

$$= -\frac{1}{2} x^2 e^{-2x} + \int \underbrace{x}_F \underbrace{e^{-2x}}_G dx$$

$$= -\frac{1}{2} x^2 e^{-2x} + \underbrace{x}_F \underbrace{\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right)}_G - \int \underbrace{1}_F \underbrace{\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right)}_G dx$$

$$= -\frac{1}{2} x^2 e^{-2x} - \frac{1}{2} x e^{-2x} + \frac{1}{2} \int e^{-2x} dx = -\frac{1}{2} x^2 e^{-2x} - \frac{1}{2} x e^{-2x} - \frac{1}{4} e^{-2x}$$

$$\text{Verifica: } [\]' = \cancel{-\frac{1}{2} \cdot 2x \cdot e^{-2x}} + \cancel{\frac{1}{2} x^2 \cdot 2e^{-2x}} - \cancel{\frac{1}{2} e^{-2x}} + \cancel{\frac{1}{2} x \cdot 2e^{-2x}} + \cancel{\frac{1}{2} e^{-2x}} \quad \text{Ok}$$

$$\text{Esempio 3} \quad \int \underbrace{x}_F \underbrace{\cos(3x)}_G dx = \underbrace{x}_F \underbrace{\frac{1}{3} \sin(3x)}_G - \int \underbrace{1}_F \underbrace{\frac{1}{3} \sin(3x)}_G dx$$

$$= \frac{1}{3} x \sin(3x) - \frac{1}{3} \int \sin(3x) dx$$

$$= \frac{1}{3} x \sin(3x) + \frac{1}{9} \cos(3x)$$

Con questo sistema si fanno tutte le primitive del tipo:

$$\int p(x) \cdot e^{ax} dx \quad \int p(x) \cdot \cos(ax) dx \quad \int p(x) \cdot \sin(ax) dx$$

dove $p(x)$ è un polinomio. L'idea è che il grado del polinomio scende di uno ad ogni passaggio per parti (perché si deriva)

Oss. le funzioni del tipo $\int \sin(ax) \cdot \sin(bx) dx$, $\int \sin(ax) \cdot \cos(bx) dx$

$\int \cos(ax) \cdot \cos(bx) dx$ si trattano facilmente usando le formule

"PRODUCT TO SUM" (formule trigonometriche). Stessa cosa se c'è anche $\cos$

Esempio 4 $\int \cos^2 x \, dx$

1° modo PER PARTI

$$\int \cos^2 x \, dx = \int \underset{F}{\cos x} \cdot \underset{g}{\cos x} \, dx = \underset{F}{\cos x} \cdot \underset{G}{\sin x} - \int \underset{F}{(-\sin x)} \cdot \underset{G}{\sin x} \, dx$$

$$= \cos x \cdot \sin x + \int \sin^2 x \, dx$$

↓ PRECORSO

$$= \cos x \cdot \sin x + \int (1 - \cos^2 x) \, dx$$

$$= \cos x \cdot \sin x + \int 1 \cdot dx - \int \cos^2 x \, dx$$

$$= \cos x \cdot \sin x + x - \int \cos^2 x \, dx$$

GRANDE RITORNO:

quello da cui sono partito a sx torna a dx ma con un coeff. diverso. Ora lo porto a sx

$$2 \int \cos^2 x \, dx = \sin x \cdot \cos x + x, \text{ da cui } \int \cos^2 x \, dx = \frac{1}{2} \sin x \cos x + \frac{1}{2} x$$

2° modo Precorso da subito: formule di duplicazione

$$\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x \quad \text{da cui} \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$$

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$$

$$\text{Allora } \int \cos^2 x \, dx = \int \frac{1 + \cos(2x)}{2} \, dx = \frac{1}{2} \int 1 \, dx + \frac{1}{2} \int \cos(2x) \, dx$$

$$= \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \sin(2x)$$

Oss. le due primitive sono la stessa in quanto

$$\frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \sin(2x) = \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \cdot 2 \sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \sin x \cos x$$

Esempio 4 $\int \sin^2 x \, dx = \int \frac{1 - \cos(2x)}{2} \, dx = \frac{1}{2} \int 1 \, dx - \frac{1}{2} \int \cos(2x) \, dx$

$$= \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \sin(2x).$$

Esempio 5 $\int \sin^3 x \, dx = \int \sin x \cdot \sin^2 x \, dx = \sin^2 x \cdot (-\cos x)$

g F F G

$$- \int 2 \sin x \cdot \cos x \cdot (-\cos x) \, dx$$

f G

$$= -\sin^2 x \cdot \cos x + 2 \int \sin x \cdot \cos^2 x \, dx = -\sin^2 x \cdot \cos x + 2 \int \sin x - \sin^3 x \, dx$$

1 - sin^2 x

$$= -\sin^2 x \cdot \cos x + 2 \int \sin x - 2 \int \sin^3 x \, dx$$

GRANDE RITORNO

$$3 \int \sin^3 x \, dx = -\sin^2 x \cdot \cos x - 2 \cos x \Rightarrow \int \sin^3 x \, dx = -\frac{1}{3} \sin^2 x \cos x - \frac{2}{3} \cos x$$

Esempio 6 $\int \cos^4 x \, dx = \int \cos x \cdot \cos^3 x \, dx$

g F

$$= \sin x \cdot \cos^3 x - \int \sin x \cdot 3 \cos^2 x \cdot (-\sin x) \, dx = \sin x \cdot \cos^3 x + 3 \int \sin^2 x \cos^2 x \, dx$$

G F G f

1 - cos^2 x

$$= \sin x \cdot \cos^3 x + 3 \int \cos^2 x \, dx - 3 \int \cos^4 x \, dx$$

Fatto prima grande ritorno

$$4 \int \cos^4 x \, dx = \sin x \cdot \cos^3 x + 3 \int \cos^2 x \, dx = \sin x \cdot \cos^3 x + \frac{3}{2} x + \frac{3}{2} \sin x \cos x$$

Oss. Allo stesso modo si fanno $\int \sin^k x \, dx$ e $\int \cos^k x \, dx$

Ad ogni passaggio per parti (+ precorso + grande ritorno) il grado k scende di 2.

ANALISI MATEMATICA 1 - LEZIONE 076

Titolo nota

22/11/2012

Esempio 1 $\int \underset{F}{e^{2x}} \cdot \underset{g}{\cos(3x)} dx = \underset{F}{e^{2x}} \underset{G}{\frac{1}{3} \sin(3x)} - \int \underset{F}{2 \cdot e^{2x}} \cdot \underset{g}{\frac{1}{3} \sin(3x)} dx$

$$= \frac{1}{3} e^{2x} \sin(3x) - \frac{2}{3} \int \underset{F}{e^{2x}} \cdot \underset{g}{\sin(3x)} dx$$

$\underset{g}{F} \rightarrow$ provare a vedere che succede

$$= \frac{1}{3} e^{2x} \sin(3x) - \frac{2}{3} \left\{ \underset{F}{e^{2x}} \underset{G}{\left(-\frac{1}{3} \cos(3x)\right)} - \int \underset{F}{2e^{2x}} \underset{g}{\left(-\frac{1}{3} \cos(3x)\right)} dx \right\}$$

$$= \frac{1}{3} e^{2x} \sin(3x) + \frac{2}{9} e^{2x} \cos(3x) - \frac{4}{9} \int \underset{F}{e^{2x}} \cdot \underset{g}{\cos(3x)} dx$$

Grande ritorno!

Portando a sx ottengo

$$\frac{13}{9} \int e^{2x} \cdot \cos(3x) dx = \frac{1}{3} e^{2x} \sin(3x) + \frac{2}{9} e^{2x} \cos(3x) \quad \text{da cui}$$

$$\int e^{2x} \cdot \cos(3x) dx = \frac{3}{13} e^{2x} \sin(3x) + \frac{2}{13} e^{2x} \cos(3x) \quad \text{VERIFICA !!}$$

Allo stesso modo si fanno tutte le primitive del tipo

$$\int e^{ax} \sin(bx) dx \quad \int e^{ax} \cos(bx) dx \quad \int e^{ax} \sin(bx) \cos(cx) dx$$

Infatti con 2 passaggi per parti si ottiene il grande ritorno (se si sta attenti a non tornare indietro).

Esempio 2 $\int \log x dx = \int \underset{g}{1} \cdot \underset{F}{\log x} dx = \underset{G}{x} \cdot \underset{F}{\log x} - \int \underset{G}{x} \cdot \underset{g}{\frac{1}{x}} dx$

$$= x \log x - \int 1 dx = x \log x - x = x (\log x - 1)$$

Esempio 3 $\int \log^2 x \, dx = \int \underset{g}{1} \cdot \underset{F}{\log^2 x} \, dx$

fatto prima
↑

$$= \underset{G}{x} \cdot \underset{F}{\log^2 x} - \int \underset{G}{x} \cdot \underset{F}{2 \log x} \cdot \underset{f}{\frac{1}{x}} \, dx = \underset{G}{x} \cdot \underset{F}{\log^2 x} - 2 \int \log x \, dx$$

$$= x \log^2 x - 2 x \log x + 2x$$

Allo stesso modo si fanno le primitive del tipo

$$\int \log^k x \, dx \quad \int p(x) \cdot \log^k x \, dx \quad \text{con } p(x) \text{ polinomio}$$

Esempio 4 $\int \underset{g}{(x^2-1)} \underset{F}{\log x} \, dx = \underset{G}{\left(\frac{x^3}{3}-x\right)} \underset{F}{\log x} - \int \underset{G}{\left(\frac{x^3}{3}-x\right)} \cdot \underset{f}{\frac{1}{x}} \, dx$

$$= \left(\frac{1}{3}x^3 - x\right) \log x - \int \left(\frac{1}{3}x^2 - 1\right) \, dx = \left(\frac{1}{3}x^3 - x\right) \log x - \frac{1}{9}x^3 + x$$

L'idea è che il logaritmo scende di grado ad ogni passaggio, e il 1 nascosto od il polinomio non peggiorano più di tanto.

Esempio 5 $\int \underset{g}{1} \cdot \underset{F}{\arctan x} \, dx =$

$$= \underset{G}{x} \cdot \underset{F}{\arctan x} - \int \underset{G}{x} \cdot \underset{f}{\frac{1}{1+x^2}} \, dx = \underset{G}{x} \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} \, dx$$

$$= x \arctan x - \frac{1}{2} \log(1+x^2)$$

Esempio 6 $\int \underset{g}{x} \underset{F}{\arctan x} \, dx = \underset{G}{\frac{1}{2}x^2} \underset{F}{\arctan x} - \int \underset{G}{\frac{1}{2}x^2} \cdot \underset{f}{\frac{1}{1+x^2}} \, dx$

$$= \frac{1}{2}x^2 \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2+1-1}{1+x^2} \, dx = \frac{1}{2}x^2 \arctan x - \frac{1}{2} \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) \, dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \arctan x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \arctan x$$

Esempio 7 $\int \cos^5 x \, dx$ 1° modo: parti + grande ritorno

2° modo: percorso + sostituzione

$$\int \cos^5 x \, dx = \int \cos x \cdot \cos^4 x \, dx = \int \cos x \cdot (1 - \sin^2 x)^2 \, dx$$

Pongo $y = \sin x$, quindi $\frac{dy}{dx} = \cos x$, cioè $dy = \cos x \, dx$

$$\begin{aligned} &= \int (1 - y^2)^2 \, dy = \int (1 - 2y^2 + y^4) \, dy = y - \frac{2}{3} y^3 + \frac{1}{5} y^5 \\ &= \sin x - \frac{2}{3} \sin^3 x + \frac{1}{5} \sin^5 x \end{aligned}$$

[Esercizio: confrontare con il risultato ottenuto nel 1° modo]

Esempio 8 $\int \sin^7 x \, dx = \int \sin x \cdot \sin^6 x \, dx = \int \sin x (1 - \cos^2 x)^3 \, dx$

Pongo $y = \cos x$, quindi $\frac{dy}{dx} = -\sin x$, da cui $dy = -\sin x \, dx$

$$\begin{aligned} &= - \int (1 - \cos^2 x)^3 \underbrace{(-\sin x) \, dx}_{dy} = - \int (1 - y^2)^3 \, dy = - \int (1 - 3y^2 + 3y^4 - y^6) \, dy \\ &= -y + y^3 - \frac{3}{5} y^5 + \frac{1}{7} y^7 = -\cos x + \cos^3 x - \frac{3}{5} \cos^5 x + \frac{1}{7} \cos^7 x \end{aligned}$$

Lo stesso sistema funziona per $\int \cos^k(x) \, dx$ e $\int \sin^k(x) \, dx$ purché k sia DISPARI (l'integrazione per parti funziona sempre).

Esempio 10 $\int \cos^4 x \, dx = \int \left[\frac{1 + \cos(2x)}{2} \right]^2 \, dx$

$$= \frac{1}{4} \int (1 + 2\cos(2x) + \cos^2(2x)) \, dx = \frac{1}{4} x + \frac{1}{4} \sin(2x) + \frac{1}{4} \int \cos^2(2x) \, dx$$

$$= \frac{1}{4} x + \frac{1}{4} \sin(2x) + \frac{1}{4} \int \frac{1 + \cos(4x)}{2} \, dx$$

$$= \frac{1}{4} x + \frac{1}{4} \sin(2x) + \frac{1}{8} x + \frac{1}{32} \sin(4x)$$

Controllare che sia la stessa
risposta che si ottiene
per parti

Esempio 11 $\int \tan x \, dx$

1° modo Per sostituzione $\int \tan x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx$

Pongo $y = \cos x$, quindi $\frac{dy}{dx} = -\sin x$, da cui $dy = -\sin x \, dx$

$$= - \int \frac{1}{\cos x} \cdot (-\sin x) \, dx = - \int \frac{1}{y} \, dy = -\log |y| = -\log |\cos x|$$

$$= \log \frac{1}{|\cos x|}$$

2° modo Per parti

$$\int \tan x \, dx = \int \underbrace{\sin x}_g \cdot \underbrace{\frac{1}{\cos x}}_F \, dx = \underbrace{(-\cos x)}_G \underbrace{\frac{1}{\cos x}}_F - \int \underbrace{(-\cancel{\cos x})}_G \underbrace{\left(-\frac{\sin x}{\cos^2 x}\right)}_f \, dx$$

$$= -1 + \int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx = -1 + \int \tan x \, dx$$

Grande ritorno con lo stesso
segno!

Semplificando ottengo $0 = -1$.

Domanda: cosa è successo?

ANALISI MATEMATICA 1 - LEZIONE 077

Titolo nota

23/11/2012

INTEGRAZIONE FUNZIONI RAZIONALI

$$\text{Funzione Razionale} = \frac{\text{polinomio}}{\text{polinomio}} = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

Algoritmo per determinazione la primitiva di una funzione razionale:

- ① Divisione
- ② Fattorizzazione
- ③ Sistema Lineare
- ④ Integrazione finale

① Divisione Se $\text{grado}(P(x)) \geq \text{grado}(Q(x))$, divido $P(x)$ per $Q(x)$

$$P(x) = Q(x) \cdot A(x) + R(x)$$

resto con $\text{grado}(R(x)) < \text{grado}(Q(x))$

Allora

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{Q(x) \cdot A(x) + R(x)}{Q(x)} = A(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

polinomio:
so fare la
primitiva

Nuova funzione razio-
nale, ma
 $\text{grado}(\text{Num.}) < \text{grado}(\text{Den.})$

Conclusione: basta saper fare le primitive delle funzioni razionali con $\text{grado}(\text{num.}) < \text{grado}(\text{den.})$

Esempi $\int \frac{x^3+3}{x^2+1} dx$

Quindi $x^3+3 = (x^2+1) \cdot x + (-x+3)$

$P(x)$ $Q(x)$ $A(x)$ $R(x)$

$$\begin{array}{r|l} x^3 & +3 \\ -x^3 & -x \\ \hline & -x+3 \end{array} \quad \begin{array}{l} x^2+1 \\ \hline x \end{array}$$

$A(x)$

$R(x)$

$$\frac{x^3+3}{x^2+1} = \frac{(x^2+1)x + (-x+3)}{x^2+1} = x - \frac{x}{x^2+1} + \frac{3}{x^2+1}$$

$$\int \frac{x^3+3}{x^2+1} dx = \int x dx - \int \frac{x dx}{x^2+1} + \int \frac{3}{x^2+1} dx$$

$$= \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2} \log(x^2+1) + 3 \arctan x$$

2 Fattorizzazione Scompone il denominatore $Q(x)$

Fatto generale Ogni polinomio a coeff. reali si può scomporre come prodotto di fattori che hanno grado ≤ 2 , eventualmente ripetuti.

I fattori di grado 1 corrispondono alle radici reali del polinomio (sono del tipo $x - \alpha$, con α radice).

I fattori di grado 2 hanno $\Delta < 0$, cioè non hanno ulteriori radici reali.

Def. La molteplicità di un fattore è il numero di volte che quel fattore compare nella scomposizione. La molteplicità di una radice α di un polinomio è il numero di volte in cui compare il fattore $x - \alpha$.

Esempi $x^4 - 1 = (x^2+1)(x^2-1) = (x^2+1)(x+1)(x-1)$

Si noti che ± 1 sono le radici reali del polinomio

$$x^3 - 1 = \underbrace{(x-1)}_{\substack{\text{radice reale} \\ x=1}} \underbrace{(x^2+x+1)}_{\substack{\Delta < 0, \text{ quindi non si scompone} \\ \text{ulteriormente su } \mathbb{R}}}$$

$$Q(x) = (x^2+2)^{(3)} (x-1)^{(4)} (x+7)$$

Il fattore (x^2+2) ha molteplicità 3

Il fattore $x-1$ " " 4 (la radice $x=1$ ha mult. 4)

" " $x+7$ ha mult. 1 (la radice $x=-7$ ha mult. 1)

x^4+1 è sicuramente prodotto di 2 polinomi di grado 2 (di grado 1 non è possibile perché non ha radici reali)

$$x^4+1 = x^4+2x^2+1-2x^2 = (x^2+1)^2 - (\sqrt{2}x)^2 \quad A^2 - B^2$$

$$= \underbrace{(x^2+1+\sqrt{2}x)}_{A+B} \underbrace{(x^2+1-\sqrt{2}x)}_{A-B}$$

[3] Sistema Lineare Scrivere la funzione razionale data come somma di funzioni razionali più semplici.

Caso semplice: se nella fattorizzazione di $Q(x)$ tutti i fattori di 1° e 2° grado hanno molteplicità 1.

In tal caso si può scrivere la funzione razionale come somma di frazioni che hanno come denominatore i singoli fattori di $Q(x)$ e numeratore
 $\rightarrow$ una costante, se il fattore è di 1° grado
 $\rightarrow$ un pol. di 1° grado se il fattore è di 2° grado

} grado num =
 grado denom. - 1

Esempio 1 $\frac{2x+5}{x^2-1} = \frac{2x+5}{(x+1)(x-1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} = \frac{Ax-A+Bx+B}{(x+1)(x-1)}$

Cerco A e B in modo che le cose funzionino. Impongo

$$\begin{cases} A+B = 2 & \text{(coeff. di } x) \\ -A+B = 5 & \text{(termine noto)} \end{cases} \quad \begin{aligned} \text{Sommo: } 2B &= 7 \Rightarrow B = \frac{7}{2} \\ A &= 2 - B = 2 - \frac{7}{2} = -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

Quindi $\frac{2x+5}{x^2-1} = -\frac{3}{2} \frac{1}{x+1} + \frac{7}{2} \frac{1}{x-1}$, per cui

$$\begin{aligned} \int \frac{2x+5}{x^2-1} dx &= -\frac{3}{2} \int \frac{1}{x+1} dx + \frac{7}{2} \int \frac{1}{x-1} dx \\ &= -\frac{3}{2} \log|x+1| + \frac{7}{2} \log|x-1| = \log \sqrt{\frac{|x-1|^7}{|x+1|^3}} \end{aligned}$$

Modo alternativo di trovare A e B.

$$\frac{2x+5}{(x+1)(x-1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1}$$

Moltiplico tutto per $x+1$; $\frac{2x+5}{x-1} = A + \frac{B(x+1)}{x-1}$ Pongo $x=-1$
 e ottengo $A = \frac{3}{-2} = -\frac{3}{2}$

Moltiplico tutto per $x-1$: $\frac{2x+5}{x+1} = \frac{A(x-1)}{x+1} + B$

Pongo $x=1$ e ottengo $\frac{7}{2} = B$

Esempio 2

$$\frac{3x^3 + 5x - 2}{x^4 - 1} = \frac{3x^3 + 5x - 2}{(x^2 + 1)(x + 1)(x - 1)}$$

$$= \frac{Ax + B}{x^2 + 1} + \frac{C}{x + 1} + \frac{D}{x - 1}$$

$$= \frac{(Ax + B)(x^2 - 1) + C(x^2 + 1)(x - 1) + D(x^2 + 1)(x + 1)}{(x^2 + 1)(x + 1)(x - 1)}$$

$$= \frac{\boxed{A}x^3 - \boxed{A}x + \boxed{B}x^2 - \boxed{B} + \boxed{C}x^3 - \boxed{C}x^2 + \boxed{C}x - \boxed{C} + \boxed{D}x^3 + \boxed{D}x^2 + \boxed{D}x + \boxed{D}}{---}$$

$A + C + D = 3$	(coeff. x^3)	$1^a - 3^a: 2A = -2 \Rightarrow A = -1$
$B - C + D = 0$	(coeff. x^2)	$2^a - 4^a: 2B = 2 \Rightarrow B = 1$
$-A + C + D = 5$	(coeff. x)	$1^a: C + D = 4$
$-B - C + D = -2$	(termine noto)	$2^a: -C + D = -1$

Somma $2D = 3 \Rightarrow D = \frac{3}{2}$

$C = 4 - D$

$= 4 - \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$

Quindi fr. iniziale = $\frac{-x+1}{x^2+1} + \frac{5}{2} \frac{1}{x+1} + \frac{3}{2} \frac{1}{x-1}$

quindi

$$\int \frac{3x^3 + 5x - 2}{x^4 - 1} dx = \int \frac{-x+1}{x^2+1} dx + \frac{5}{2} \int \frac{1}{x+1} dx + \frac{3}{2} \int \frac{1}{x-1} dx$$

$$= -\frac{1}{2} \log(x^2+1) + \arctan x + \frac{5}{2} \log|x+1| + \frac{3}{2} \log|x-1|$$

— 0 — 0 —

ANALISI MATEMATICA 1 - LEZIONE 078

Titolo nota

23/11/2012

Fase 3 se il denominatore ha tutti i fattori di 1° e 2° grado con molteplicità uno.

$$Q(x) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{denominatore}}}{(x-\alpha_1) \cdots (x-\alpha_k)} (a_1 x^2 + b_1 x + c_1) \cdots (a_m x^2 + b_m x + c_m)$$

Si punta a scrivere la frazione data in questo modo

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-\alpha_1} + \cdots + \frac{A_k}{x-\alpha_k} + \frac{B_1 x + C_1}{a_1 x^2 + b_1 x + c_1} + \cdots + \frac{B_m x + C_m}{a_m x^2 + b_m x + c_m}$$

Il grado di $Q(x)$ è $k+2m$

Il grado di $P(x)$ è minore del grado di $Q(x)$, quindi $\leq k+2m-1$, quindi $P(x)$ ha $k+2m$ coefficienti (nota: un polinomio di grado n ha $n+1$ coefficienti, perché c'è anche il termine noto).

Il sistema lineare ha

→ $k+2m$ incognite

→ $k+2m$ equazioni (una per ogni coeff. di $P(x)$)

Si può dimostrare che in questo caso il sistema ha sempre una soluzione unica.

Esempio

$$\begin{aligned} \frac{x}{x^3+1} &= \frac{x}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1} \\ &= \frac{A(x^2-x+1) + (Bx+C)(x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)} \\ &= \frac{Ax^2 - Ax + A + Bx^2 + Bx + Cx + C}{(x+1)(x^2-x+1)} \end{aligned}$$

$$A+B = 0 \quad (\text{coeff. } x^2)$$

$$B = -A$$

$$A = -\frac{1}{3} \quad B = C = \frac{1}{3}$$

$$-A+B+C = 1 \quad (\text{coeff. } x)$$

$$-A-A-A = 1$$

$$A+C = 0 \quad (\text{termine noto})$$

$$C = -A$$

Il sistema ha 3 equazioni anche se il numeratore ha grado 1.

Num equazioni = numero incognite = grado denominatore.

Il coeff. A si poteva calcolare con il metodo alternativo. Molt. per $x+1$

$$\frac{x(x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)} = A + \frac{(Bx+C)(x+1)}{x^2-x+1}$$

Pongo $x = -1$ e ottengo $\frac{-1}{3} = A$, come sopra.

Per calcolare B e C con lo stesso metodo bisogna usare i complessi per avere dei valori che annullino il fattore x^2-x+1 .

Come fare se al denominatore ci sono molteplicità.

Esempio

$$\frac{x}{(x+1)^2(x-2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} + \frac{d}{dx} \frac{C}{x+1}$$

esattamente come prima

fattore con grado = grado (denom.) - 1
parte non ancora utilizzata del denominatore

$$\frac{7x^2+5}{(x^2+1)^2(x-2)^3(x+5)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{x-2} + \frac{D}{x+5} + \frac{d}{dx} \frac{Ex^3+Fx^2+Gx+H}{(x^2+1)(x-2)^2}$$

come se non ci fossero le molteplicità

Ho quindi 8 incognite e grado denominatore = 8, quindi avrò 8 equazioni corrispondenti ai coeff. dal termine noto fino a x^7 .

Nell'esempio 1 avrei

$$\frac{x}{(x+1)^2(x-2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} + \frac{d}{dx} \frac{C}{x+1}$$

$$= \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} - \frac{C}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{A(x+1)(x-2) + B(x+1)^2 - C(x-2)}{(x+1)^2(x-2)}$$

da qui in poi si svolgono i conti.

Esempio $\int \frac{x^2}{(x^2+1)^2} dx$

Divisione non necessaria. Fattorizzazione già fatta.

$$\frac{x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{Ax+B}{\boxed{x^2+1}} + \frac{d}{dx} \frac{Cx+D}{\boxed{x^2+1}} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C(x^2+1)-2x(Cx+D)}{(x^2+1)^2}$$

$\uparrow$ fattore usato una volta $\uparrow$ parte non ancora utilizzata del denominatore.

$$= \frac{(Ax+B)(x^2+1) + C(x^2+1) - 2x(Cx+D)}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{Ax^3 + Ax + \boxed{Bx^2} + B + \boxed{Cx^2} + C - \boxed{2Cx^2} - 2Dx}{(x^2+1)^2}$$

$$A=0 \quad (\text{coeff. } x^3)$$

$$A=0$$

$$B-C=1 \quad (\text{coeff. } x^2)$$

$$2B=1 \Rightarrow B=\frac{1}{2}$$

$$A-2D=0 \quad (\text{coeff. } x)$$

$$D=0$$

$$B+C=0 \quad (\text{termine noto})$$

$$C=-\frac{1}{2}$$

Quindi $\frac{x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{\frac{1}{2}}{x^2+1} + \frac{d}{dx} \frac{-\frac{1}{2}x}{x^2+1}$

$$= \frac{1}{2} \frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \frac{x}{x^2+1}$$

$$\int \frac{x^2}{(x^2+1)^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2+1} dx - \frac{1}{2} \int \frac{d}{dx} \frac{x}{x^2+1} dx$$

$$= \frac{1}{2} \arctan x - \frac{1}{2} \boxed{\frac{x}{x^2+1}}$$

$\downarrow$ l'integrale della derivata è la funzione stessa.

Esempio $\int \frac{x^5+1}{x^4+x^3} dx$

$$\begin{array}{r} x^5+1 \\ -x^5-x^4 \\ \hline -x^4+1 \\ \quad x^4+x^3 \\ \hline \quad \quad x^3+1 \end{array} \quad \begin{array}{l} x^4+x^3 \\ x-1 \end{array}$$

$$x^5 + 1 = (x^4 + x^3)(x-1) + (x^3 + 1)$$

$$\frac{x^5 + 1}{x^4 + x^3} = x - 1 + \frac{x^3 + 1}{x^4 + x^3} \quad \text{Five divisione}$$

$$\begin{aligned} \frac{x^3 + 1}{x^4 + x^3} &= \frac{x^3 + 1}{x^3(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{d}{dx} \frac{Cx + D}{x^2} \\ &= \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{d}{dx} \left(\frac{C}{x} + \frac{D}{x^2} \right) \\ &= \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} - \frac{C}{x^2} - \frac{2D}{x^3} \\ &= \frac{Ax^2(x+1) + Bx^3 - Cx(x+1) - 2D(x+1)}{x^3(x+1)} \end{aligned}$$

$$= \frac{Ax^3 + Ax^2 + Bx^3 - Cx^2 - Cx - 2Dx - 2D}{x^3(x+1)}$$

$$A + B = 1 \quad (x^3) \quad B = 1 - A = 0$$

$$A - C = 0 \quad (x^2) \quad A = C = 1$$

$$-C - 2D = 0 \quad (x) \quad C = -2D = 1$$

$$-2D = 1 \quad (\text{term. noto}) \quad D = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{x^3 + 1}{x^4 + x^3} = \frac{1}{x} + \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} \right)$$

Concludendo:

$$\frac{x^5 + 1}{x^4 + x^3} = x - 1 + \frac{1}{x} + \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} \right) \quad \text{da cui}$$

$$\int \frac{x^5 + 1}{x^4 + x^3} dx = \frac{1}{2} x^2 - x + \log|x| + \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} \quad \text{VERIFICA !!}$$

ANALISI MATEMATICA 1 - LEZIONE 079

Titolo nota

23/11/2012

Al termine della fase 3 restano da integrare 3 tipi di termini

① termini del tipo $\frac{A}{x-a} \rightsquigarrow A \log|x-a|$

② termini del tipo $\frac{d}{dx}(\text{Roba}) \rightsquigarrow \text{Roba}$

③ termini del tipo $\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$ (volendo con $a=1$)

con il denominatore che ha $\Delta < 0$, cioè non scomponibile.

Esempio 1 $\int \frac{3x+5}{x^2+2} dx = 3 \int \frac{x}{x^2+2} dx + 5 \int \frac{1}{x^2+2} dx$
 $= \frac{3}{2} \log(x^2+2) + 5 \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{x}{\sqrt{2}}$

$$\int \frac{1}{a+x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{a}} \arctan \frac{x}{\sqrt{a}}$$

Allo stesso modo $\int \frac{Ax+B}{x^2+c} dx = A \int \frac{x}{x^2+c} dx + B \int \frac{1}{x^2+c} dx$
 $= \frac{A}{2} \log(x^2+c) + \frac{B}{\sqrt{c}} \arctan \frac{x}{\sqrt{c}}$

Achtung! Se fosse $c < 0$, il denominatore si potrebbe scomporre, quindi si potrebbe fare la fase 3.

Esempio 2 $\int \frac{1}{x^2+2x+2} dx = \int \frac{1}{1+(x+1)^2} dx = \arctan(x+1)$

Esempio 3 $\int \frac{2x+5}{x^2+2x+2} dx$ L'idea: sistemare un pezzo con il log ed il restante con arctan

$$= \int \frac{2x+2+3}{x^2+2x+2} dx = \int \frac{2x+2}{x^2+2x+2} dx + \int \frac{3}{x^2+2x+2} dx$$

$$= \log(x^2+2x+2) + 3 \arctan(x+1)$$

Esempio 4 $\int \frac{5x+2}{x^2+2x+2} dx = \int \frac{5x+5-3}{x^2+2x+2} dx$

$$= \int \frac{5x+5}{x^2+2x+2} dx - \int \frac{3}{x^2+2x+2} dx = \frac{5}{2} \int \frac{2x+2}{x^2+2x+2} dx - \int \frac{3}{x^2+2x+2} dx$$

$$= \frac{5}{2} \log(x^2+2x+2) - 3 \arctan(x+1)$$

↑ non metto il valore assoluto perché
l'argomento è sempre > 0 .

Esempio 5 $\int \frac{1}{x^2+2x+6} dx = \int \frac{1}{5+(x+1)^2} dx = \frac{1}{\sqrt{5}} \arctan \frac{x+1}{\sqrt{5}}$

↑
Pongo $x+1=y$

Esempio 6 $\int \frac{3x+5}{x^2+4x+7} dx$

[Volei sopra $2x+4$, ma mi faccio andare bene $3x+6 \dots$]

$$= \int \frac{3x+6}{x^2+4x+7} dx - \int \frac{1}{x^2+4x+7} dx$$

$$= \frac{3}{2} \int \frac{2x+4}{x^2+4x+7} dx - \int \frac{1}{3+(x+2)^2} dx$$

$$= \frac{3}{2} \log(x^2+4x+7) - \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{x+2}{\sqrt{3}}$$

[Esercizio: trovare la formula per il caso $\frac{Ax+B}{x^2+bx+c}$]
— o — o —

Esempio 7 $\int \frac{1}{\cos x} dx$ Moltiplico sopra e sotto per $\cos x$

$$\int \frac{\cos x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{\cos x}{1-\sin^2 x} dx$$

Pongo $y = \sin x$, quindi $\frac{dy}{dx} = \cos x$
da cui $dy = \cos x \cdot dx$

$$= \int \frac{1}{1-y^2} \cos x dx$$

$$= \int \frac{1}{1-y^2} dy \quad \text{devo fare questo integrale razionale}$$

$$\frac{1}{1-y^2} = \frac{1}{(1+y)(1-y)} = \frac{-1}{(y+1)(y-1)} = \frac{A}{y+1} + \frac{B}{y-1}$$

Moltiplico per $(y+1)$: $\frac{-1}{y-1} = A + B \frac{y+1}{y-1}$; $y = -1 \leadsto A = \frac{1}{2}$

Moltiplico per $(y-1)$: $\frac{-1}{y+1} = A \frac{y-1}{y+1} + B$; $y = 1 \leadsto B = -\frac{1}{2}$

Quindi $\frac{1}{1-y^2} = \frac{1}{2} \frac{1}{y+1} - \frac{1}{2} \frac{1}{y-1}$ da cui

$$\int \frac{1}{1-y^2} dy = \frac{1}{2} \log |y+1| - \frac{1}{2} \log |y-1| = \frac{1}{2} \log \left| \frac{y+1}{y-1} \right|$$

Tornando all'inizio

$$\int \frac{1}{\cos x} dx = \frac{1}{2} \log \left| \frac{\sin x + 1}{\sin x - 1} \right|$$

$\uparrow$
 $y = \sin x$

Esempio 8 $\int \arcsin x dx = \int \underset{g}{1} \cdot \underset{F}{\arcsin x} dx$

$$= \underset{G}{x} \cdot \underset{F}{\arcsin x} - \int \underset{G}{x} \cdot \underset{f}{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}} dx = x \cdot \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

Pongo $y = 1-x^2$, da cui $\frac{dy}{dx} = -2x$, cioè $dy = -2x dx$

$$\int \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} (-2x) dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{y}} dy = \sqrt{y} = \sqrt{1-x^2}$$

In conclusione $\int \arcsin x dx = x \cdot \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$

Esempio 9 $\int \frac{x}{x^4+1} dx \quad \int \frac{x^2}{x^4+1} dx \quad \int \frac{x^3}{x^4+1} dx$

$$\int \frac{x^3}{x^4+1} dx = \frac{1}{4} \int \frac{4x^3}{x^4+1} dx = \frac{1}{4} \log(x^4+1)$$

Volevo venire con la sostituzione $y = x^4+1$ oppure $y = x^4$

$$\int \frac{x}{x^4+1} dx \quad \text{Pongo } y = x^2 \text{ da cui } \frac{dy}{dx} = 2x, \text{ cioè } dy = 2x dx$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^4+1} \cdot 2x dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{y^2+1} dy = \frac{1}{2} \arctan y = \frac{1}{2} \arctan(x^2)$$

Per il centrale bisogna fare

$$\frac{x^2}{x^4+1} = \frac{x^2}{(x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)} = \frac{Ax+B}{x^2+\sqrt{2}x+1} + \frac{Cx+D}{x^2-\sqrt{2}x+1}$$

Sistema lineare ... e poi integrazione dei singoli pezzi...

ANALISI MATEMATICA 1 - LEZIONE 080

Titolo nota

24/11/2012

SOSTITUZIONI RAZIONALIZZANTI→ Funzioni razionali di e^x

→ Radici n-esime di rda di 1° grado

→ Radici quadrate di rda di 2° grado

→ Sostituzioni trigonometriche

Esempio 1 $\int \frac{e^{2x}}{1+e^x} dx$

Pongo $y = e^x$, quindi $\frac{dy}{dx} = e^x$, da cui
 $dy = e^x dx$

$$= \int \frac{e^x}{1+e^x} \cdot \boxed{e^x dx}_{dy} = \int \frac{y}{1+y} dy$$

$$= \int \frac{y+1-1}{1+y} dy = \int \left(1 - \frac{1}{1+y}\right) dy$$

$$= y - \log|1+y| = e^x - \log(1+e^x)$$

Non uero il valore assoluto
 perché $1+e^x > 0$ sempre

Alternativa: pongo $y = 1+e^x$, quindi $\frac{dy}{dx} = e^x$, da cui $dy = e^x dx$

$$\int \frac{\boxed{e^x}}{\boxed{1+e^x}} e^x dx = \int \frac{y-1}{y} dy = \int \left(1 - \frac{1}{y}\right) dy = y - \log|y|$$

$$= \boxed{1} + e^x - \log(1+e^x)$$

è una costante, ma in fondo è
 la "stessa primitiva" di prima

Esempio 2 $\int \frac{1}{1+e^{2x}} dx$

Pongo $y = e^x$, quindi come prima $dy = e^x dx$

$$= \int \frac{1}{1+e^{2x}} \cdot \boxed{e^x dx}_{dy} = \int \frac{1}{1+y^2} \cdot \frac{1}{y} dy$$

$$\frac{1}{y(1+y^2)} = \frac{A}{y} + \frac{By+C}{1+y^2} = \frac{A+Ay^2+By^2+Cy}{y(1+y^2)}$$

$$A+B=0 \quad (\text{coeff. } x^2)$$

$$C=0 \quad (\text{coeff. } x)$$

$$A=1 \quad (\text{term. noto})$$

$A=1, B=-1, C=0$, quindi

$$\frac{1}{y(1+y^2)} = \frac{1}{y} - \frac{y}{1+y^2} \quad \text{da cui} \quad \int \frac{dy}{y(1+y^2)} = \log|y| - \frac{1}{2} \log(1+y^2)$$

Tornando in x :

$$\int \frac{dx}{1+e^{2x}} = \log|e^x| - \frac{1}{2} \log(1+e^{2x}) = x - \frac{1}{2} \log(1+e^{2x})$$

Alternativa: Pongo $y = 1+e^{2x}$, quindi $\frac{dy}{dx} = 2e^{2x}$, da cui $dy = 2e^{2x} dx$

$$\int \frac{1}{1+e^{2x}} dx = \int \frac{1}{\underbrace{2e^{2x}}_{y-1}} \cdot \underbrace{\frac{1}{1+e^{2x}}}_{\frac{1}{y}} \cdot \underbrace{2e^{2x} dx}_{dy} = \frac{1}{2} \int \frac{1}{y(y-1)} dy$$

$$\frac{1}{y(y-1)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{y-1} = \frac{Ay - A + By}{y(y-1)} \quad \begin{array}{ll} A+B=0 & B=1 \\ -A=1 & A=-1 \end{array}$$

$$\frac{1}{y(y-1)} = -\frac{1}{y} + \frac{1}{y-1} \quad \text{da cui} \quad \int \frac{1}{y(y-1)} dy = -\log|y| + \log|y-1|$$

Tornando nella variabile x , abbiamo

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{1+e^{2x}} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{y(y-1)} dy = -\frac{1}{2} \log|y| + \frac{1}{2} \log|y-1| \\ &= -\frac{1}{2} \log(1+e^{2x}) + \frac{1}{2} \log e^{2x} \\ &= -\frac{1}{2} \log(1+e^{2x}) + x \end{aligned}$$

Osservazione Si fanno allo stesso modo tutti gli integrali con funzioni razionali di e^x .

Esempio 3 $\int \frac{8^x}{3+4^x} dx$ Pongo $y = 2^x$, quindi $dy = 2^x \log 2 \cdot dx$

$$= \int \frac{2^{2x}}{3+2^{2x}} \cdot \frac{2^x dx}{\log 2} = \frac{1}{\log 2} \int \frac{y^2}{3+y^2} dy = \frac{1}{\log 2} \int \frac{y^2+3-3}{3+y^2} dy$$

$$= \frac{1}{\log 2} \int \left(1 - \frac{3}{3+y^2}\right) dy = \frac{1}{\log 2} \left\{ y - 3 \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{y}{\sqrt{3}} \right\} =$$

$$= \frac{1}{\log 2} \left\{ 2^x - \sqrt{3} \arctan \frac{2^x}{\sqrt{3}} \right\} \quad \text{VERIFICA !!}$$

Esempio 4 $\int \frac{5+\sqrt{x}}{x+2} dx$ Pongo $y = \sqrt{x}$, da cui $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
quindi $dy = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$

$$= \int \frac{5+\sqrt{x}}{\boxed{x+2}} \cdot 2\sqrt{x} \boxed{\frac{dx}{2\sqrt{x}}} = \int \frac{5+y}{y^2+2} \cdot 2y dy = 2 \int \frac{y^2+5y+2-2}{y^2+2} dy$$

$$= 2 \int \left(1 + \frac{5y-2}{y^2+2} \right) dy = 2 \int \left(1 + \frac{5y}{y^2+2} - \frac{2}{y^2+2} \right) dy =$$

$$= 2y + 2 \frac{5}{2} \log(y^2+2) - 4 \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{y}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{x} + 5 \log(x+2) - 2\sqrt{2} \arctan \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2}}$$

il resto della funzione ha
senso solo per $x \geq 0$, quindi
qui non serve il valore assoluto

Sostituzione reinterpretata:

Pongo $y = \sqrt{x}$, da cui $x = y^2$, da cui

$\frac{dx}{dy} =$ derivata di x rispetto a $y = 2y$, quindi $dx = 2y dy$

$$\int \frac{5+\sqrt{x}}{x+2} dx = \int \frac{5+y}{y^2+2} \cdot 2y dy \quad \text{e arrivo allo stesso punto di prima}$$

Esempio 5 $\int \frac{5+x}{\sqrt[3]{x+3}+2} dx$ Pongo $y = \sqrt[3]{x+3}$, da cui $y^3 = x+3$, cioè
 $x = y^3 - 3$. Allora $\frac{dx}{dy} = 3y^2$, cioè
 $dx = 3y^2 dy$

$$= \int \frac{5+y^3-3}{y+2} 3y^2 dy = 3 \int \frac{y^3+2y^2}{y+2} dy$$

e da qui si conclude con la divisione di polinomi.

Esempio 6 $\int \frac{5+\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}+2} dx$ Pongo $y = \sqrt[6]{x}$, da cui $x = y^6$ e $dx = 6y^5 dy$

$$= \int \frac{5+y^3}{y^2+2} \cdot 6y^5 dy = 6 \int \frac{y^8+5y^5}{y^2+2} dy \quad \text{e si conclude con la divisione.}$$

Regola generale: se l'integrale contiene termini del tipo $\sqrt{x}$, $\sqrt[n]{x}$, ..., $\sqrt[k]{x}$ conviene fare la sostituzione $y = \sqrt[n]{x}$, con $n =$ minimo comune multiplo di tutti gli ordini di radice presenti.

Esempio 7 $\int \sqrt{\frac{x+3}{x+2}} dx$ Pongo $y = \sqrt{\frac{x+3}{x+2}}$, da cui $y^2 = \frac{x+3}{x+2}$

... ricavo x ... $xy^2 + 2y^2 = x+3$
 $x(y^2-1) = 3-2y^2$, quindi $x = \frac{3-2y^2}{y^2-1}$

da cui $dx = \left[\frac{3-2y^2}{y^2-1} \right]' dy$

$$= \int \underset{F}{y} \left[\underset{g}{\frac{3-2y^2}{y^2-1}} \right]' dy = \underset{F}{y} \underset{G}{\frac{3-2y^2}{y^2-1}} - \int \underset{F}{1} \cdot \underset{G}{\frac{3-2y^2}{y^2-1}} dy$$

e da qui si divide con le funzioni razionali.

La cosa funziona per integrali con $\sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}$.

ANALISI MATEMATICA 1 - LEZIONE 081

Titolo nota

24/11/2012

Integrande con termini del tipo

$$\sqrt{ax^2+bx+c}$$

Esempio 1 $\int \sqrt{x^2+3x+5} dx$

Pongo $y+x = \sqrt{x^2+3x+5}$ che è come dire
 $y = \sqrt{x^2+3x+5} - x$

Cerco di ricavare x in funzione di y

$$y^2 + 2xy + \cancel{x^2} = \cancel{x^2} + 3x + 5$$

Essendo di 1° grado in x , risolvo senza $\sqrt{}$

$$x(2y-3) = 5-y^2 \quad x = \frac{5-y^2}{2y-3}$$

da cui $dx = \left[\frac{5-y^2}{2y-3} \right]' dy$

$$= \int (y+x) dx$$

$$= \int \left(y + \frac{5-y^2}{2y-3} \right) \left[\frac{5-y^2}{2y-3} \right]' dy$$

$\uparrow$
 x ricavato

Almeno è ragionevole

$$= \int \frac{\cancel{2y^2} - 3y + 5 - \cancel{y^2}}{2y-3} \cdot \left[\frac{5-y^2}{2y-3} \right]' dy = \text{con "qualche" conto si chiude.}$$

$\downarrow$ $\quad \quad \quad \downarrow$
 $F \quad \quad \quad g$

Esempio 2 $\int \sqrt{3x^2+5} dx$

Pongo $y + \sqrt{3}x = \sqrt{3x^2+5}$

Facendo i quadrati

$$y^2 + 2\sqrt{3}xy + \cancel{3x^2} = \cancel{3x^2} + 5, \text{ quindi}$$

$$2\sqrt{3}xy = 5-y^2 \quad x = \frac{5-y^2}{2\sqrt{3}y}$$

da cui $dx = \left[\frac{5-y^2}{2\sqrt{3}y} \right]' dy$

$$= \int (y + \sqrt{3}x) dx = \int \left(y + \sqrt{3} \frac{5-y^2}{2\sqrt{3}y} \right) \left[\frac{5-y^2}{2\sqrt{3}y} \right]' dy =$$

$$= \int \frac{2y^2+5-y^2}{2y} \frac{1}{2\sqrt{3}} \left[\frac{5}{y} - y \right]' dy = \frac{1}{4\sqrt{3}} \int \frac{y^2+5}{y} \left[-\frac{5}{y^2} - 1 \right] dy$$

$$= -\frac{1}{4\sqrt{3}} \int \left(y + \frac{5}{y} \right) \left(1 + \frac{5}{y^2} \right) dy = -\frac{1}{4\sqrt{3}} \int \left(y + \frac{10}{y} + \frac{25}{y^3} \right) dy =$$

$$= -\frac{1}{4\sqrt{3}} \left(\frac{1}{2} y^2 + 10 \log |y| - \frac{25}{2} \frac{1}{y^2} \right) \quad \text{Ora basta sostituire}$$

$$y = \sqrt{3x^2+5} - \sqrt{3}x$$

Regola generale: quando ho $\int \sqrt{ax^2+bx+c} dx$ posso porre

$$y + \sqrt{a}x = \sqrt{ax^2+bx+c} \quad \text{funziona se } a > 0$$

Esempio 3 $\int \sqrt{x^2-4x-5} dx$ Potrei fare $y+x = \sqrt{x^2-4x-5}$

Metodo alternativo: scomporre $x^2-4x-5 = (x-5)(x+1)$.

Scelgo a caso uno dei 2 fattori: $x-5$

Pongo $y(x-5) = \sqrt{x^2-4x-5} = \sqrt{(x-5)(x+1)}$

Facciamo i quadrati trovo

$$y^2(x-5)^2 = (x-5)(x+1) \quad \text{che è di 1° grado in } x$$

$$xy^2 - 5y^2 = x+1, \quad x(y^2-1) = 1+5y^2$$

$$x = \frac{1+5y^2}{y^2-1} \quad \text{da cui} \quad dx = \left[\frac{1+5y^2}{y^2-1} \right]' dy$$

$$= \int y(x-5) dx = \int y \left(\frac{1+5y^2}{y^2-1} - 5 \right) \cdot \left[\frac{1+5y^2}{y^2-1} \right]' dy$$

e da qui in poi sono conti con funzioni razionali.

Esempio 4 $\int \sqrt{4-x^2} dx$ Qui il metodo con $\sqrt{a}$ non funziona...

$4-x^2 = (2+x)(2-x)$ Pongo $y(2+x) = \sqrt{(2+x)(2-x)}$

$$y^2(2+x)^2 = (2+x)(2-x)$$

$$2y^2 + xy^2 = 2-x \quad x(y^2+1) = 2-2y^2$$

$$x = \frac{2-2y^2}{y^2+1} \quad dx = \left[\frac{2-2y^2}{y^2+1} \right]' dy$$

$$= \int y(2+x) dx = \int y \left(2 + \frac{2-2y^2}{y^2+1} \right) \left[\frac{2-2y^2}{y^2+1} \right]' dy$$

$$\begin{aligned}
 &= \int y \left(\frac{2y^2+2+2-2y^2}{y^2+1} \right) \frac{1}{2} \left[\frac{1-y^2}{y^2+1} \right]' dy = 8 \int \frac{y}{y^2+1} \frac{-2y(y^2+1) - 2y(1-y^2)}{(y^2+1)^2} dy \\
 &= 8 \int \frac{y}{y^2+1} \frac{-2y^3-2y-2y+2y^3}{(y^2+1)^2} dy = -32 \int \frac{y^2}{(y^2+1)^3} dy \\
 \frac{y^2}{(y^2+1)^3} &= \frac{Ay+B}{y^2+1} + \frac{d}{dy} \frac{Cy^3+Dy^2+Ey+F}{(y^2+1)^2} \quad \text{e con "qualche" calcolo si chiude}
 \end{aligned}$$

Runto della situazione: $\sqrt{ax^2+bx+c}$

	$y+\sqrt{a}x = \sqrt{\dots}$	$y(x-\text{radice}) = \sqrt{\dots}$
$a > 0$	OK	del polinomio ↑ Bor
$\Delta \geq 0$	Bor.	OK

- ① Se $a > 0$ e $\Delta \geq 0$ ho 2 strumenti buoni
- ② Se $a > 0$ e $\Delta < 0$ funziona $y+\sqrt{a}x$
- ③ Se $a < 0$ e $\Delta \geq 0$ funziona $y(x-\text{radice})$
- ④ Se $a < 0$ e $\Delta < 0$ si ha che $ax^2+bx+c < 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, quindi la funzione $\sqrt{ax^2+bx+c}$ non ha mai senso.

Esempio 5 $\int \sqrt{4-x^2} dx$ Pongo $x = 2\sin y$, da cui $dx = 2\cos y dy$

$$= \int \sqrt{4-4\sin^2 y} \cdot 2\cos y dy = 4 \int \sqrt{1-\sin^2 y} \cdot \cos y dy$$

$$= 4 \int \cos^2 y dy = 4 \int \frac{\cos(2y)+1}{2} dy \quad \cos(2y) = 2\cos^2 y - 1$$

$$= 2 \int (\cos(2y)+1) dy = \sin(2y) + 2y \quad \text{Ora voglio tornare in } x$$

$$= 2\sin y \cos y + 2y$$

$$y = \arcsin \frac{x}{2}$$

$$= \boxed{2\sin y} \sqrt{1-\sin^2 y} + 2y$$

$$= x \sqrt{1-\frac{x^2}{4}} + 2 \arcsin \frac{x}{2}$$

Passaggi delicati: $\rightarrow$ tutte le volte che abbiamo usato $\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y}$
perché ci potrebbero essere problemi di segno.
 $\rightarrow$ considerare arcsin $\times$ allegramente

Rimedio: fare la verifica della primitiva ottenuta.

ANALISI MATEMATICA 1 - LEZIONE 082

Titolo nota

24/11/2012

Esempio 1 $\int \sqrt{5-4x-4x^2} dx$

$$4x^2+4x-5=0 \quad \Delta > 0$$

$\Rightarrow$ ci sono 2 radici

$\Rightarrow$ uno dei 2 metodi funziona

$$= \int \sqrt{6-1-4x-4x^2} dx$$

$$= \int \sqrt{6-(2x+1)^2} dx$$

Pongo $y = 2x+1$ da cui $dy = 2dx$

$$= \frac{1}{2} \int \sqrt{6-(2x+1)^2} \cdot 2dx = \frac{1}{2} \int \sqrt{6-y^2} dy$$

Pongo $y = \sqrt{6} \cos z$

da cui $dy = \sqrt{6}(-\sin z) dz$

$$= \frac{1}{2} \int \sqrt{6-6\cos^2 z} \sqrt{6}(-\sin z) dz$$

$$= -\frac{\sqrt{6}}{2} \sqrt{6} \int \sqrt{1-\cos^2 z} \cdot \sin z dz = -3 \int \sin^2 z dz \quad \text{e da qui è come prima.}$$

Osservazione Ogni polinomio di 2° grado ax^2+bx+c si può scrivere come

$$(x+\beta)^2 + \gamma \quad \text{se } a > 0$$

$$-(x+\beta)^2 + \gamma \quad \text{se } a < 0$$

Esempio 2 $\int \sqrt{x^2+1} dx$

Di sicuro funziona $y+x = \sqrt{x^2+1}$

Ricordo la relazione fondamentale $\cos^2 x - \sin^2 x = 1$

quindi $\cos^2 x = 1 + \sin^2 x$

Pongo nell'integrale $x = \sin y$ da cui $dx = \cos y dy$

$$\int \sqrt{x^2+1} dx = \int \sqrt{\sin^2 y + 1} \cdot \cos y dy = \int \cos^2 y dy$$

Per integrare $\cos^2 y$ vedo
3 possibilità

$\rightarrow$ espandere $\cos^2 y$ con la definizione

$\rightarrow$ formula di duplicazione $\cos^2(2y) \dots$

$\rightarrow$ parti + grande ritorno

$$\begin{aligned}
 \int \cos^2 y \, dy &= \int \underbrace{\cos y}_F \cdot \underbrace{\cos y}_G \, dy = \underbrace{\cos y}_F \cdot \underbrace{\sin y}_G - \int \underbrace{\sin^2 y}_f \, dy \\
 &= \cos y \cdot \sin y - \int (\cos^2 y - 1) \, dy \\
 &= \cos y \cdot \sin y + y - \int \cos^2 y \, dy
 \end{aligned}$$

grande ritorno

Quindi:

$$\int \cos^2 y \, dy = \frac{1}{2} \boxed{\cos y} \cdot \boxed{\sin y} + \frac{1}{2} \boxed{y}$$

$\downarrow$ x $\downarrow$ $\text{setto } \sin x$

Ora devo tornare in x

$$\sqrt{1 + \sin^2 y} = \sqrt{1 + x^2}$$

In definitiva

$$\int \sqrt{1+x^2} \, dx = \frac{1}{2} x \sqrt{1+x^2} + \boxed{\text{Setto } \sin x}$$

$\downarrow$ volendo per questo c'è una formula in termini di $\log$ e $\sqrt{1+x^2}$...

Formule parametriche per $\sin x$ e $\cos x$

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2} \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad t = \tan \frac{x}{2}$$

Esempio 3 $\int \frac{3 + \sin x}{5 + \cos x} \, dx$ Pongo $y = \tan \frac{x}{2}$; $dy = (1 + \tan^2 \frac{x}{2}) \frac{1}{2} dx$

$$= \int \frac{3 + \frac{2y}{1+y^2}}{5 + \frac{1-y^2}{1+y^2}} \cdot \frac{2dy}{1+y^2}$$

$dy = (1+y^2) \frac{1}{2} dx$, quindi $dx = \frac{2dy}{1+y^2}$

Resta solo una funzione razionale.

Esempio 4 $\int \frac{1}{\sin x} \, dx = \int \frac{1+y^2}{2y} \cdot \frac{2dy}{1+y^2} = \int \frac{dy}{y} = \log |y|$

$$= \log \left| \tan \frac{x}{2} \right|$$

1° metodo alternativo: moltiplico sopra e sotto per $\sin x$

$$\int \frac{1}{\sin x} dx = \int \frac{\sin x}{\sin^2 x} dx = \int \frac{\sin x}{1 - \cos^2 x} dx$$

Pongo $y = \cos x$, quindi $dy = -\sin x dx$

$$= - \int \frac{-\sin x}{1 - \cos^2 x} dx = - \int \frac{dy}{1 - y^2} = \int \frac{dy}{y^2 - 1}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{y^2 - 1} &= -\frac{1}{2} \frac{1}{y+1} + \frac{1}{2} \frac{1}{y-1}, & &= -\frac{1}{2} \log|y+1| + \frac{1}{2} \log|y-1| \\ & & &= -\frac{1}{2} \log|\cos x + 1| + \frac{1}{2} \log|\cos x - 1| \end{aligned}$$

Oss. lo stesso metodo funziona per tutte le potenze DISPARI negative di $\sin x$ e $\cos x$.

Esempio 5 $\int \frac{1}{\cos^3 x} dx$

1° modo: formule parametriche

2° modo: moltiplico sopra e sotto per $\cos x$:

$$\int \frac{1}{\cos^3 x} dx = \int \frac{\cos x}{\cos^4 x} dx = \int \frac{\cos x}{(1 - \sin^2 x)^2} dx$$

Pongo $y = \sin x$ da cui $dy = \cos x dx$

$$\begin{aligned} &= \int \frac{dy}{(1 - y^2)^2} \text{ che è razionale ...} & \frac{1}{(1 - y^2)^2} &= \frac{1}{(1 - y)^2 (1 + y)^2} \\ & & &= \frac{A}{1 - y} + \frac{B}{1 + y} + \frac{C}{1 - y} + \frac{D}{1 + y} \\ & & &= \frac{A}{1 - y} + \frac{B}{1 + y} + \frac{dy}{dy} \frac{Cy + D}{1 - y^2} \end{aligned}$$

Esempio 6 $\int_0^{10} \sqrt{5x - 2} dx$

Bisogna spezzare

$$|5x - 2| = \begin{cases} 5x - 2 & \text{per } x \geq \frac{2}{5} \\ 2 - 5x & \text{per } x \leq \frac{2}{5} \end{cases}$$

Quindi

$$\int_0^{10} \sqrt{|5x-2|} dx = \int_0^{\frac{2}{5}} \sqrt{2-5x} dx + \int_{\frac{2}{5}}^{10} \sqrt{5x-2} dx$$

$\int \sqrt{5x-2} dx$ Pongo $y = 5x-2$ da cui $dy = 5dx$, $dx = \frac{1}{5} dy$

$$= \int \sqrt{y} \frac{1}{5} dy = \frac{1}{5} \int \sqrt{y} dy = \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{3} y^{3/2} = \frac{2}{15} (5x-2)^{3/2}$$

Achtung! Quando uso la sostituzione per calcolare un integrale con gli estremi, bisogna

→ o tornare in x prima di sostituire gli estremi

→ o cambiare anche gli estremi

facio la primitiva

$$\int_{\frac{2}{5}}^{10} \sqrt{5x-2} dx \stackrel{?}{=} \left[\frac{2}{15} (5x-2)^{3/2} \right]_{\frac{2}{5}}^{10} \quad \boxed{\text{OK}}$$

$$\begin{aligned} \int_{\frac{2}{5}}^{10} \sqrt{5x-2} dx &= \frac{1}{5} \int_{??}^{??} \sqrt{y} dy && \text{Quando } x = \frac{2}{5} \text{ ho } y = 5x-2 = 0 \\ &= \frac{1}{5} \int_0^{48} \sqrt{y} dy && \text{Quando } x = 10 \text{ ho } y = 48 \\ &= \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{3} \left[y^{3/2} \right]_0^{48} && \boxed{\text{OK}} \end{aligned}$$

$$\int_{\frac{2}{5}}^{10} \sqrt{5x-2} dx = \dots = \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{3} \left[y^{3/2} \right]_{\frac{2}{5}}^{10} \quad \boxed{\text{No}} \text{ Occorre cambiare gli estremi !!!}$$

ANALISI MATEMATICA 1 - LEZIONE 083

Titolo nota

28/11/2012

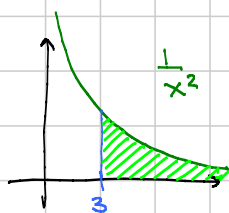
INTEGRALI IMPROPRI Due ingredienti fondamentali per integrali propri:

- zona di integrazione limitata (intervallo $[a, b]$),
- funzione integranda limitata.

Un integrale si dice improprio se manca almeno uno dei 2 ingredienti.

Esempi

$$\int_3^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$$



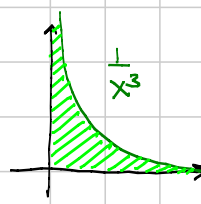
integranda limitata
zona di int. no

$$\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$



integranda non lim.
zona di int. limitata

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx$$



integranda non lim.
zona di int. non lim.

Achtung! Nel secondo esempio quello che rende l'integrale improprio è che $\frac{1}{\sqrt{x}}$ tende a $+\infty$ per $x \rightarrow 0^+$, quindi non è limitata, non il fatto che non è definita per $x=0$.

INTEGRALI IMPROPRI MONOPROBLEMA "Con un problema solo"

Sono di 2 tipi

1° tipo Zona di integrazione = semiretta $[a, +\infty)$ oppure $(-\infty, a]$
funzione integranda limitata

$$\int_{-\infty}^a f(x) dx$$

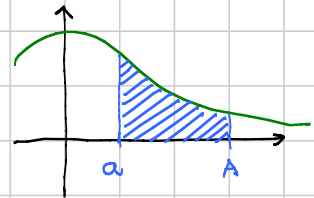
$$\int_a^{+\infty} f(x) dx$$

2° tipo Zona di integrazione = intervallo $[a, b]$
 funzione integranda non limitata, ma solo nell'intorno di uno dei due estremi di integrazione.

Definizioni Nel caso del **1° tipo** si pone

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A f(x) dx$$

Questo è un integrale proprio perché f è limitata

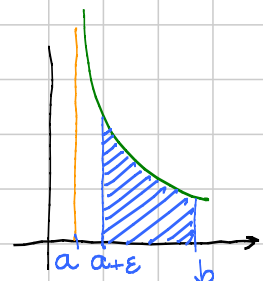


Analogamente $\int_{-\infty}^a f(x) dx = \lim_{A \rightarrow -\infty} \int_A^a f(x) dx$

Nel caso del **2° tipo**, se il problema è in a si pone

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx$$

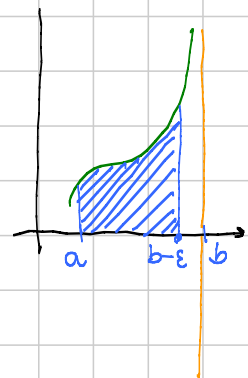
Questo è un integrale proprio perché appena mi stacco da a la $f(x)$ è limitata.



Analogamente, se il problema è in b , si pone

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx$$

occhio: se voglio che $b-\varepsilon < b$ deve essere $\varepsilon > 0$, quindi $\varepsilon \rightarrow 0^+$.



Oss. Essendo definito come limite, un integrale improprio ha 4 possibili comportamenti

- convergere (il limite è $l \in \mathbb{R}$),
- divergere a $+\infty$,
- " " $-\infty$
- essere indeterminato

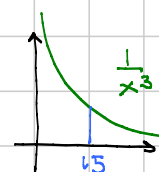
— 0 — 0 —

E se c'è più di un problema? Si procede così:

- ① Si spezza in tanti integrali con un problema solo
- ② Si studiano i singoli pezzi
- ③ Si deduce il comportamento complessivo sulla base del comportamento dei singoli pezzi, con la convenzione che se un pezzo diverge a $+\infty$ ed un pezzo diverge a $-\infty$, allora tutto quanto è indeterminato.

Esempi di spezzamento

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx \quad \text{Questo ha 2 problemi} \\ (a=0 \text{ e } a=+\infty)$$



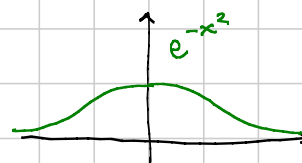
$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx = \int_0^{15} \frac{1}{x^3} dx + \int_{15}^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx$$

(Posso usare un qualunque $a > 0$ invece di 15)

entrambi sono MONOPROBLEMA

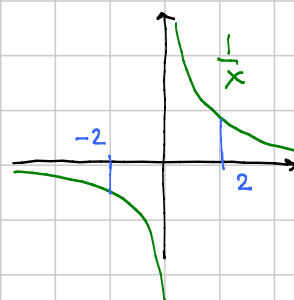
$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^0 e^{-x^2} dx + \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$$

oppure $\int_{-\infty}^{-3} e^{-x^2} dx + \int_{-3}^{+\infty} e^{-x^2} dx$



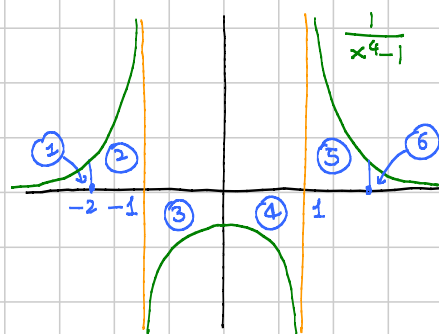
$$\int_{-2}^2 \frac{1}{x} dx$$

In un certo senso ha solo il problema in $x=0$, che non è un estremo, quindi va spezzato



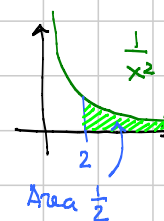
$$\int_{-2}^2 \frac{1}{x} dx = \int_{-2}^0 \frac{1}{x} dx + \int_0^2 \frac{1}{x} dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^4-1} dx \\ = \int_{-\infty}^{-2} + \int_{-2}^{-1} + \int_{-1}^0 + \int_0^1 + \int_1^5 + \int_5^{+\infty}$$



Esempio 1 $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_2^A \frac{1}{x^2} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{x} \right]_2^A$

$$= \lim_{A \rightarrow +\infty} \left\{ -\frac{1}{A} + \frac{1}{2} \right\} = \frac{1}{2}$$



Esempio 2 $\int_0^{+\infty} e^{-2x} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A e^{-2x} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{2} e^{-2x} \right]_0^A$

$$= \lim_{A \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{2} e^{-2A} + \frac{1}{2} \right] = \frac{1}{2}$$

Esempio 3 $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} [\arctan x]_0^A$

$$= \lim_{A \rightarrow +\infty} \{ \arctan A - \arctan 0 \} = \frac{\pi}{2}$$

Esempio 4 $\int_0^1 \frac{1}{x^2} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{x^2} dx$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[-\frac{1}{x} \right]_{\varepsilon}^1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left\{ -1 + \frac{1}{\varepsilon} \right\} = +\infty$$



Esempio 5 $\int_0^5 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^5 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} [2\sqrt{x}]_{\varepsilon}^5$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \{ 2\sqrt{5} - 2\sqrt{\varepsilon} \} = 2\sqrt{5}$$

ANALISI MATEMATICA 1 - LEZIONE 084

Titolo nota

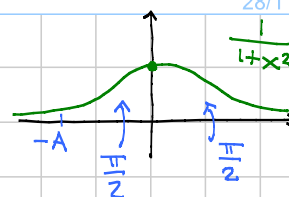
28/11/2012

Esempio 1 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \int_{-\infty}^0 + \int_0^{+\infty}$

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2} \quad (\text{fatto prima})$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2} dx &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{-A}^0 \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} [\arctan x]_{-A}^0 \\ &= \lim_{A \rightarrow +\infty} [\arctan 0 - \arctan(-A)] = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

$\downarrow -\frac{\pi}{2}$



Quindi $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \int_{-\infty}^0 + \int_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$

Oss. Come sempre, se l'integranda $f(x)$ è positiva nella zona di integrazione, l'integrale (anche se improprio) non può venire negativo o divergere a $-\infty$.

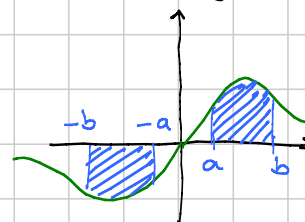
Oss. Sfruttare le simmetrie risparmia dei calcoli. Cioè

• Se $f(x)$ è pari, allora $\int_a^b f(x) dx$ è come fare $\int_{-b}^{-a} f(x) dx$

• Se $f(x)$ è dispari, allora $\int_a^b f(x) dx$ è come fare $\int_{-b}^{-a} f(x) dx$ cambiato di segno.

In particolare, se $f(x)$ è dispari e limitata, allora

$$\int_{-A}^A f(x) dx = 0$$



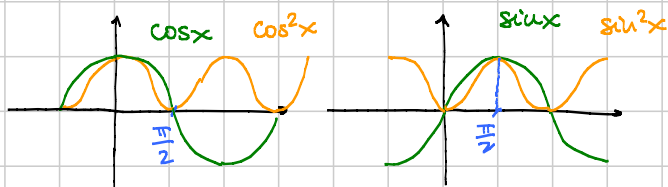
Se $f(x)$ è pari e limitata, allora

$$\int_{-A}^A f(x) dx = 2 \int_0^A f(x) dx, \quad \text{cioè} \quad \int_{-A}^0 f(x) dx = \int_0^A f(x) dx$$

Altro esempio sulle simmetrie

$$\int_0^{\pi/2} \cos^2 x \, dx$$

Potei farlo con la primitiva



I grafici di $\cos^2 x$ e $\sin^2 x$ hanno notevoli simmetrie, esattamente come quelli di $\cos x$ e $\sin x$. Quindi se pongo

$$C = \int_0^{\pi/2} \cos^2 x \, dx \quad S = \int_0^{\pi/2} \sin^2 x \, dx \quad \text{ho che } C = S$$

$$\text{D'altra parte } C + S = \int_0^{\pi/2} (\cos^2 x + \sin^2 x) \, dx = \int_0^{\pi/2} 1 \, dx = \frac{\pi}{2}.$$

$$\text{Pertanto } C = S = \frac{\pi}{4}.$$

Da ricordare : $\int_a^b 1 \, dx = (b-a) = \text{lunghezza intervallo}$
 $= (\text{area di un rettangolo di altezza } 1)$

$$\int_0^{k\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \, dx = \int_0^{k\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \, dx = \frac{k\pi}{4} \quad \text{per ogni } k \in \mathbb{Z}$$

(sono uguali e la loro somma è l'integrale di 1 tra 0 e $k\frac{\pi}{2}$).

Formalmente si dimostra tutto con un cambio di variabili:

$$\int_0^{\pi/2} \cos^2 x \, dx \quad \text{Pongo } y = \frac{\pi}{2} - x. \quad \text{Quando } x=0 \text{ ho che } y = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Quando } x = \frac{\pi}{2} \text{ ho che } y = 0$$

$$\text{Infine } dy = -dx$$

$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \cos^2\left(\frac{\pi}{2} - y\right) (-dy) = - \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \cos^2\left(\frac{\pi}{2} - y\right) dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\left(\frac{\pi}{2} - y\right) dy$$

$$\quad \quad \quad (\cos(\frac{\pi}{2} - y) = \sin y) \quad = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 y \, dy$$

Torniamo agli integrali impropri. Sia $a > 0$.

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A \frac{1}{x} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} [\log x]_a^A$$

$$= \lim_{A \rightarrow +\infty} (\log A - \log a) = +\infty$$

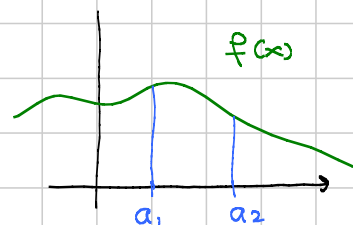
$\searrow +\infty$

$$\int_0^a \frac{1}{x} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_\varepsilon^a \frac{1}{x} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (\log a - \log \varepsilon) = +\infty$$

$\searrow -\infty$

Osservazione Se ho $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ con $a > 0$, il comportamento non dipende dal valore di a se $f(x)$ è limitata

$$\int_{a_1}^{+\infty} f(x) dx = \underbrace{\int_{a_1}^{a_2} f(x) dx}_{\text{Numero}} + \int_{a_2}^{+\infty} f(x) dx$$



I due integrali impropri differiscono per un numero, quindi hanno lo stesso comportamento (se convergono, possono convergere a valori diversi).

Esempio 1 $\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$ $(\alpha > 0)$

$$= \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A \frac{1}{x^\alpha} dx \stackrel{\alpha \neq 1}{=} \lim_{A \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{-\alpha+1} \frac{1}{x^{\alpha-1}} \right]_a^A$$

$$= \lim_{A \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{-\alpha+1} \frac{1}{A^{\alpha-1}} - \frac{1}{-\alpha+1} \frac{1}{a^{\alpha-1}} \right)$$

Ci sono 2 casi:

→ se $\alpha-1 > 0$, cioè se $\alpha > 1$, si ha che $\frac{1}{A^{\alpha-1}} \rightarrow 0$, quindi l'integrale converge a $\frac{1}{1-\alpha} \frac{1}{a^{\alpha-1}}$

→ se $\alpha-1 < 0$, cioè se $\alpha < 1$, si ha che $\frac{1}{A^{\alpha-1}} \rightarrow +\infty$, quindi (visto che il coefficiente $\frac{1}{-\alpha+1} > 0$, tutto l'integrale diverge a $+\infty$).

Tenendo conto del caso $\alpha = 1$ fatto precedentemente, abbiamo che

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx \begin{cases} \nearrow \text{converge se } \alpha > 1 \\ \searrow \text{diverge a } +\infty \text{ se } \alpha \leq 1 \end{cases}$$

PROBLEMA

A $+\infty$

Esempio 2 dato $a > 0$, $\int_0^a \frac{1}{x^\alpha} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_\varepsilon^a \frac{1}{x^\alpha} dx$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[\frac{1}{-\alpha+1} \frac{1}{x^{\alpha-1}} \right]_\varepsilon^a = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{-\alpha+1} \frac{1}{a^{\alpha-1}} - \frac{1}{-\alpha+1} \frac{1}{\varepsilon^{\alpha-1}} \right)$$

Ci sono 2 casi

→ Se $\alpha-1 < 0$, cioè se $\alpha < 1$, allora $\frac{1}{\varepsilon^{\alpha-1}} \rightarrow 0$, quindi l'integrale converge

→ Se $\alpha-1 > 0$, cioè se $\alpha > 1$, allora $\frac{1}{\varepsilon^{\alpha-1}} \rightarrow +\infty$, quindi (tenendo conto del segno del coeff.) si ha che l'integrale diverge a $+\infty$.

Tenendo conto del caso $\alpha=1$ fatto all'inizio, abbiamo che

$$\int_0^a \frac{1}{x^\alpha} dx \begin{cases} \nearrow \text{converge per } \alpha < 1 \\ \searrow \text{diverge a } +\infty \text{ per } \alpha \geq 1 \end{cases}$$

PROBLEMA

IN 0

Oss. La situazione è "invertita" rispetto al problema a $+\infty$.

Questo non stupisce se si pensa ai grafici



ANALISI MATEMATICA 1 - LEZIONE 085

Titolo nota

29/11/2012

Integrali impropri → Spezzare in integrali MONOPROBLEMA
 → Studiare i singoli pezzi (capire se convergono o no)

Integrandi $f(x) \geq 0$ Integrandi a segno qualunque

→ Confronto

→ Confronto asintotico ↗ casi standard
 ↘ casi limite

→ Assoluta integrabilità

→ Trucco integr. per parti

→ Metodo triangolini

Fatto fondamentale Se $f(x) \geq 0$, allora l'integrale improprio può solo convergere o divergere a $+\infty$.

Criterio del confronto Supponiamo che $0 \leq f(x) \leq g(x)$ per ogni $x \in E$.
 Allora valgono le seguenti implicazioni:

↓ in realtà basta
 per ogni x
 "vicino al problema"

$$\int_E g(x) dx < +\infty \Rightarrow \int_E f(x) dx < +\infty$$

$$\int_E f(x) dx = +\infty \Rightarrow \int_E g(x) dx = +\infty$$

(Nota: si intende che gli integrali considerati sono MONOPROBLEMA, ed E indica l'insieme di integrazione, che può essere un intervallo o una semiretta)

Achtung! Tutte le altre implicazioni sono abusive.

Criterio del confronto asintotico

Consideriamo 2 integrali impropri
monoproblema

$$\int_E f(x) dx$$

$$\int_E g(x) dx$$

Supponiamo che $f(x) \geq 0$ e $g(x) > 0$ in E . Supponiamo che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L \quad \begin{matrix} \neq 0 \\ \neq +\infty \end{matrix} \quad (\text{CASI STANDARD})$$

è il p.to in cui c'è il problema: si intende che i due integrali hanno un solo problema e ce l'hanno nello stesso punto x_0 , che può essere un estremo di integrazione o $\pm\infty$.

Allora i due integrali hanno lo stesso comportamento, cioè il 1° converge se e solo se converge il 2°.

CASI LIMITE. Supponiamo che $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

[Allora $\frac{f(x)}{g(x)} < 1$ vicino ad x_0 , quindi $f(x) < g(x)$ vicino a x_0 , quindi]

$$\int_E g(x) dx < +\infty \Rightarrow \int_E f(x) dx < +\infty ; \quad \int_E g(x) dx = +\infty \Rightarrow \text{BOH}$$

Supponiamo invece che $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$

[Allora $\frac{f(x)}{g(x)} > 1$ vicino ad x_0 , quindi $f(x) > g(x)$ vicino ad x_0 , quindi]

$$\int_E g(x) dx < +\infty \Rightarrow \text{BOH}, \quad \int_E g(x) dx = +\infty \Rightarrow \int_E f(x) dx = +\infty.$$

Absoluta integrabilità

$$\int_E |f(x)| dx < +\infty \Rightarrow \int_E f(x) dx \text{ converge}$$

$$\int_E |f(x)| dx = +\infty \Rightarrow \int_E f(x) dx \text{ BOH}$$

Esempio 1 $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + \sqrt{x}}$ Ci sono 2 problemi: a 0 e a $+\infty$

$\int_0^1 + \int_1^{+\infty}$. Considero $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + \sqrt{x}}$. L'integrandola è > 0

$f(x) \sim \frac{1}{x^2}$ a $+\infty$, quindi $\int f(x) dx$ con problema a $+\infty$ si comporta come $\int \frac{1}{x^2} dx$ con problema a $+\infty$, quindi converge.

Rigoroso: confronto asintotico con $g(x) = \frac{1}{x^2}$. Devo fare

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2 + \sqrt{x}} \cdot x^2 = 1 \neq 0 \neq +\infty$$

$\Rightarrow$ i 2 integrali con problema a $+\infty$ hanno lo stesso comportamento.

Considero ora $\int_0^1 \frac{1}{x^2 + \sqrt{x}} dx$. Ancora una volta $f(x) > 0$.

$f(x) \sim \frac{1}{\sqrt{x}}$, quindi si comporta come $\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ con problema in 0. Questo converge perché $\frac{1}{2} < 1$.

Rigoroso: confronto asintotico con $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$. Devo fare

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2 + \sqrt{x}} \cdot \sqrt{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x\sqrt{x} + 1} = 1 \neq 0 \neq +\infty$$

Esempio 2 $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{x\sqrt{x}} dx$ Ancora una volta $f(x) \geq 0$ e ho 2 problemi

Problema a $+\infty$ $\frac{\arctan x}{x\sqrt{x}} \leq \frac{142}{x\sqrt{x}}$ ← potrei mettere anche $\frac{\pi}{2}$

$\int \frac{142}{x\sqrt{x}} dx = 142 \int \frac{1}{x\sqrt{x}} dx$ con problema a $+\infty$ converge, in quanto ha esponente $\frac{3}{2} > 1$.

Quindi anche $\int \frac{\arctan x}{x\sqrt{x}} dx$, con problema a $+\infty$, converge.

Problema a 0 Non posso usare il confronto di prima, in quanto

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x}} dx \text{ con problema in } 0 \text{ diverge, quindi BOH.}$$

Ora $f(x) \sim \frac{x}{x\sqrt{x}}$ vicino a 0, quindi $f(x) \sim \frac{1}{\sqrt{x}}$, quindi
 $\uparrow$
 $\arctan x \sim x$ l'integrale con problema in 0 converge.

Formalmente faccio confronto asintotico con $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x\sqrt{x}} \cdot \cancel{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x} = 1 \neq 0 \neq +\infty$$

$\Rightarrow$ i due integrali hanno lo stesso comportamento, quindi convergono.

Nota bene: $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x}} dx = \underbrace{\int_0^1 \frac{1}{x\sqrt{x}} dx}_{+\infty} + \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x}} dx}_{\text{conv.}} = +\infty$

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \underbrace{\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx}_{\text{conv.}} + \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx}_{+\infty} = +\infty$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{x\sqrt{x}} dx = \underbrace{\int_0^1 \frac{\arctan x}{x\sqrt{x}} dx}_{\text{conv.}} + \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x\sqrt{x}} dx}_{\text{conv.}} \quad \text{conv.}$$

Esempio 3 $\int_0^1 \frac{1}{\sin x} dx$

Nota bene: l'integranda è > 0 , in quanto $\sin x > 0$ in $(0, 1]$,
 anzi $\sin x > 0$ in $(0, \pi)$

Ora per gli sviluppi $\frac{1}{\sin x} \sim \frac{1}{x}$ per $x \sim 0$, quindi

$\int \frac{1}{\sin x} dx$ con problema unico in 0 si comporta come $\int \frac{1}{x} dx$
 " " " " " , quindi DIVERGE.

ANALISI MATEMATICA 1 - LEZIONE 086

Titolo nota

29/11/2012

Esempio 1 $\int_2^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx$ ora l'integranda ha segno variabile

Uso l'assoluta integrabilità, cioè studio $\int_2^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x^2} dx$

Ora $\frac{|\sin x|}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}$ per ogni $x > 0$. Quindi

$\int \frac{1}{x^2} dx$ con unico problema a $+\infty$ converge (esp. $2 > 1$)

Allora per confronto $\int \frac{|\sin x|}{x^2} dx$ con unico problema a $+\infty$ converge.

Allora per assoluta integrabilità anche $\int \frac{\sin x}{x^2} dx$ con pb. a $+\infty$ converge.

Esempio 2 $\int_0^{20} \frac{\sin x}{x^2} dx$ Ora vicino a $x=0$ l'integranda è > 0 , quindi posso usare i criteri per integrande ≥ 0 . Vedendo

$$\int_0^{20} = \boxed{\int_0^1} + \boxed{\int_1^{20}}$$

$\downarrow$ Qui l'integranda è ≥ 0 .
 integrale proprio, quindi un numero

Ora $\frac{\sin x}{x^2} \sim \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}$ vicino a 0, quindi l'integrale diverge

Formalmente: confronto asintotico con $\frac{1}{x} = g(x)$.

Esempio 3 $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$ Integranda ≥ 0 , unico problema a $+\infty$

Faccio confronto asintotico con $g(x) = \frac{1}{x^2}$, che mi darebbe convergenza

$$\text{Faccio } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x^2} \cdot x^2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^{x^2}} = 0 \text{ Caso limite}$$

[$\frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow 0$, quindi $\frac{f(x)}{g(x)} < 1$ vicino al problema, quindi $f(x) < g(x)$]

Ora $\int g(x) dx$ con unico problema a $+\infty$ converge, quindi $\int e^{-x^2} dx$ con unico problema a $+\infty$ converge pure.

Achtung! $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = +\infty$ per colpa del problema in $x=0$, ma questo

non vuol dire che $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = +\infty$, anzi !!!

Esempio 4 $\int_0^1 \log x dx$ improprio con unico problema in $x=0$.

L'integrandola è a segno costante, ma negativa.

Volevamo di più portare il segno - fuori

$$\int_0^1 \log x dx = - \int_0^1 (-\log x) dx$$

Provo a fare il confronto asintotico con $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ che dovrebbe conv.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \underbrace{\sqrt{x}}_{\downarrow 0} \underbrace{(-\log x)}_{+\infty} = 0$$

Tabellina

[quindi $\frac{f(x)}{g(x)} < 1$ vicino a $x=0$, quindi $f(x) < g(x)$ vicino a $x=0$, quindi]

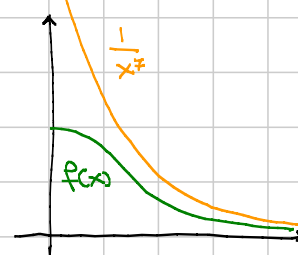
poiché $\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ con unico pb. a 0 conv., anche $\int \log x dx$ con unico problema a 0 converge.

Esempio 5 $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^3} dx = \left[-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2} \right]_{-1}^1 = -\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2} \right) = 0$

NO!! È un integrale improprio e come tale va trattato.

C'è un problema in $x=0$, quindi $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^3} dx = \underbrace{\int_{-1}^0 \frac{1}{x^3} dx}_{-\infty \text{ per simmetria}} + \underbrace{\int_0^1 \frac{1}{x^3} dx}_{+\infty \text{ (tabellina)}}$

Per definizione il globale è INDETERMINATO.



Cosa fare se il problema è in un pto diverso da 0 o da $+\infty$?

Si sposta il problema con un cambio di variabili

Esempio 6 $\int_1^2 \frac{1}{x^2-1} dx$ c'è un problema in $x=1$.

Pongo $y = x-1$ Quando $x=1$ ho che $y=0$
 $dy = dx$ Quando $x=2$ ho che $y=1$
 $x = y+1$

$$= \int_0^1 \frac{1}{(y+1)^2-1} dy$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{y^2+2y+1-1} dy = \int_0^1 \frac{1}{y^2+2y} dy$$

Questo si comporta come $\int \frac{1}{y}$ con problema a 0, quindi diverge.

Fatti generali

$\int_a^b \frac{1}{ x-a ^\alpha} dx$	↑ converge	se $\alpha < 1$
	↓ diverge a $+\infty$	se $\alpha \geq 1$
$\int_a^b \frac{1}{ b-x ^\alpha} dx$	↑ converge	se $\alpha < 1$
	↓ diverge a $+\infty$	se $\alpha \geq 1$

(Con un cambio di variabili basta spostare il problema in $x=0$)

Esempio 7 $\int_1^3 \frac{1}{\log x} dx$ Problema in $x=1$, per il resto $f(x) \geq 0$.

Pongo $y = x-1$, da cui $dy = dx$ e $x = y+1$

Quando $x=1$ ho che $y=0$, quando $x=3$ ho che $y=2$

$$= \int_0^2 \frac{1}{\log(y+1)} dy$$

Ora $\frac{1}{\log(1+y)} \sim \frac{1}{y}$, quindi l'integrale diverge

Formalmente basta fare il conf. asint. con $g(y) = \frac{1}{y}$. Si ritrova

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(y)}{g(y)} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\log(1+y)} = 1 \quad \begin{matrix} \neq 0 \\ \neq +\infty \end{matrix} \quad \dots$$

Esempio 8 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^3-1}} dx$ Problema in 1 e a $+\infty$. Quindi spesso

Problema a $+\infty$ $f(x) \sim \frac{1}{\sqrt{x^3}} = \frac{1}{x^{3/2}} \quad \frac{3}{2} > 1 \Rightarrow \text{converge}$

Confronto asintotico con $g(x) = \frac{1}{x^{3/2}}$...

Problema in 1 Volendo si fa il cambio di variabili...

In alternativa $\frac{1}{\sqrt{x^3-1}} = \frac{1}{\sqrt{(x-1)(x^2+x+1)}}$
 $\uparrow$ colpevole dell'improprietà dell'integrale

Quindi l'integrale si comporta come l'integrale di $\frac{1}{\sqrt{x-1}}$ con problema in 1. Questo è in tabellina e converge perché l'esponente è $\frac{1}{2} < 1$.

Rigoroso: confronto asintotico con $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x^3-1}} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{(x-1)(x^2+x+1)}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \neq 0 \neq +\infty$$

Quindi gli integrali hanno lo stesso comportamento.

ANALISI MATEMATICA - LEZIONE 087

Titolo nota

30/11/2012

CONFRONTI SERIE - INTEGRALI Gli integrali aiutano le serie...Sia $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione tale che(i) $f(x) > 0$ per ogni $x \geq 0$,(ii) $f(x)$ è debolmente decrescenteOsservazione geometrica:Area dei rettangoli "sotto" $\leq$ Area sotto la funzione $f(x) \leq$

Area dei rettangoli "sopra"

$$\text{Area sotto funzione} = \int_0^{+\infty} f(x) dx$$

Somma aree dei rettangoli "sopra"

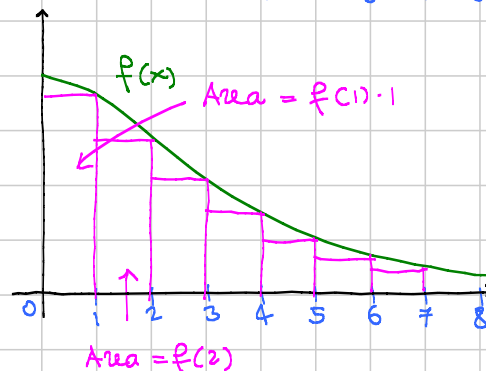
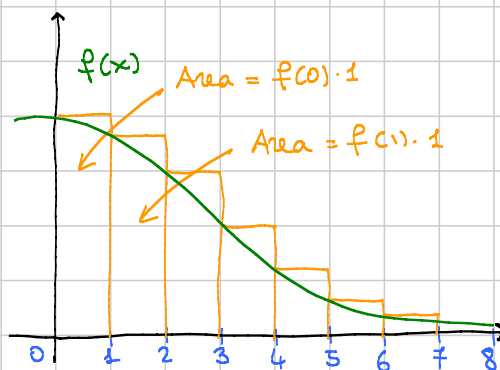
$$= \sum_{n=0}^{\infty} f(n)$$

↑ area rettangolo con base 1
e altezza $f(n)$

$$\text{Somma aree rettangoli "sotto"} = \sum_{n=1}^{\infty} f(n).$$

In conclusione abbiamo dimostrato che

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \leq \int_0^{+\infty} f(x) dx \leq \sum_{n=0}^{\infty} f(n)$$



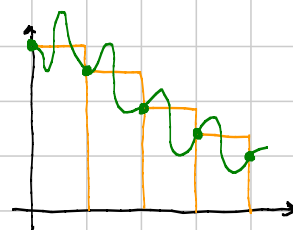
Ora

- ① Se l'integrale improprio converge, quando la disug. di s_x e deduco che anche la serie converge
- ② Se l'integrale improprio diverge, quando la disug. di s_x e deduco che anche la serie diverge.

Non ci sono altri comportamenti possibili. Inoltre la serie di s_x converge se e solo se la serie di s_x converge (differiscono di un solo termine).

Conclusione: la serie e l'integrale improprio si comportano allo stesso modo (se $f(x) > 0$ e debolm. decr.)

Oss. Ho usato la monotonia di $f(x)$ per fare le osservazioni geometriche



Variaute Supponiamo ora che $f: [M, +\infty)$ con M intero positivo e debolmente decrescente. Allora

$$\sum_{n=M+1}^{\infty} f(n) \leq \int_M^{+\infty} f(x) dx \leq \sum_{n=M}^{+\infty} f(n)$$



Nel caso $M=0$ si ricottiene la formula precedente.

Esempio 1 $f: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \frac{1}{x^a}$ è decrescente

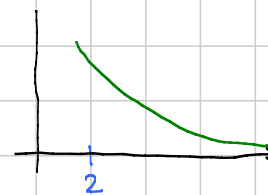
Allora

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a} \text{ converge se e solo se } \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^a} dx \text{ converge}$$

e abbiamo dimostrato che l'integrale converge se e solo se $a > 1$.

Esempio 2 Consideriamo la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log^a n}$$



Considero $f: [2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \frac{1}{x \log^a x}$.

È decrescente (anche strettamente) perché il numeratore è fisso, ed il denominatore è positivo e strett. crescente.

Per il confronto serie - integrali ho che la serie si comporta come

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \log^a x} dx$$

L'integrale lo studio con la definizione

$$\begin{aligned} \int_2^{+\infty} \frac{1}{x \log^a x} dx &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_2^A \frac{1}{x \log^a x} dx \stackrel{a \neq 1}{=} \lim_{A \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{1-a} \frac{1}{\log^{a-1} x} \right]_2^A \\ &= \frac{1}{1-a} \left\{ \frac{1}{\log^{a-1} A} - \frac{1}{\log^{a-1} 2} \right\} \end{aligned}$$

Ora $\rightarrow$ se $a-1 > 0$, cioè $a > 1$ il termine $\frac{1}{\log^{a-1} A} \rightarrow 0$, quindi l'integrale converge

$\rightarrow$ se $a-1 < 0$, cioè $a < 1$ il termine $\frac{1}{\log^{a-1} A} \rightarrow +\infty$, quindi l'integrale diverge a $+\infty$

Resterebbe da trattare a parte il caso $a=1$ in cui $\int \frac{1}{x \log x} dx = \log |\log x|$ in cui ancora l'integrale diverge.

Esempio 3 Consideriamo la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2^n} \arctan n = S$

È facile dimostrare che la serie converge (ad esempio con il criterio della radice o del rapporto).

Problema: ottenere un valore approssimato per la somma della serie.

Se io sommo i termini da 0 fino ad un certo M , quale errore commetto?

Chiamiamo S la somma. Allora avremo che

$$0 \leq S - \sum_{n=0}^M \frac{n+1}{2^n} \arctan n = \sum_{n=M+1}^{+\infty} \frac{n+1}{2^n} \arctan n \leq \frac{\pi}{2} \sum_{n=M+1}^{+\infty} \frac{n+1}{2^n}$$

Ora per la disuguaglianza di confronto serie - integrali, si ha che

$$\sum_{n=M+1}^{+\infty} \frac{n+1}{2^n} \leq \int_M^{+\infty} \frac{x+1}{2^x} dx \quad \text{se sappiamo che } f(x) = \frac{x+1}{2^x} \text{ è}$$

positiva e decrescente.

$f(x) = (x+1) \cdot 2^{-x}$ almeno da un certo punto
in poi è decrescente

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2^{-x} + (x+1) 2^{-x} (-\log 2) \\ &= 2^{-x} (1 - \log 2 x - \log 2) \end{aligned}$$

Anche l'integrale si calcola

$$\begin{aligned} \int_M^{+\infty} (x+1) \cdot 2^{-x} dx &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_M^A (x+1) \cdot 2^{-x} dx \\ &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \left\{ (x+1) \left(-\frac{1}{\log 2} \cdot 2^{-x} \right) + \int \frac{1}{\log 2} \cdot 2^{-x} dx \right\}_M^A \\ &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \left[-\frac{x+1}{\log 2} \cdot 2^{-x} - \frac{1}{\log^2 2} \cdot 2^{-x} \right]_M^A \\ &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \left[-\frac{A+1}{\log 2} \cdot 2^{-A} - \frac{1}{\log^2 2} \cdot 2^{-A} + \frac{M+1}{\log 2} \cdot 2^{-M} + \frac{1}{\log^2 2} \cdot 2^{-M} \right] \end{aligned}$$

$\downarrow 0$ $\downarrow 0$

Quindi, prendendo per esempio $M = 10$, abbiamo che

$$0 \leq S - \sum_{n=0}^{10} \frac{n+1}{2^n} \arctan n \leq \left(\frac{11}{\log 2} \cdot \frac{1}{2^{10}} + \frac{1}{\log^2 2} \cdot \frac{1}{2^{10}} \right) \frac{\pi}{2}$$

Quindi con solo 10 termini si ottiene un errore dell'ordine di $\frac{11}{2^{10}}$.

ANALISI MATEMATICA 1 - LEZIONE 088

Titolo nota

30/11/2012

INTEGRALI OSCILLANTI Trucco dell'integrazione per parti.

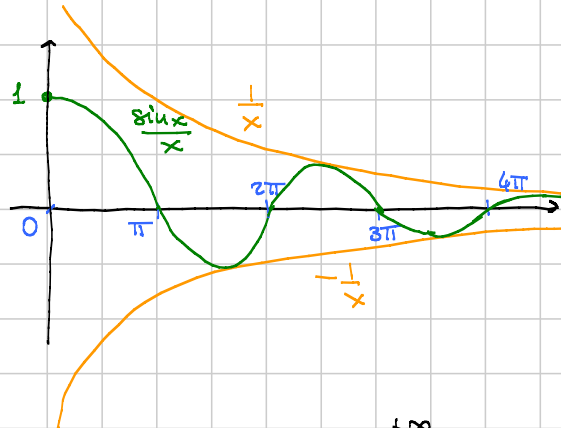
Esempio 1 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$

Il segno dell'integrandi è variabile
L'integrale improprio ha unico problema a $+\infty$.
Infatti l'integrandi tende ad $\pm$ quando
 $x \rightarrow 0$, dunque è limitata vicino ad $x=0$.

$$-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}$$

Oss. $\int_0^5 \frac{\sin x}{x} dx$ è un inte=

grale PROPRIO (funzione limi=
tata su zona limitata).



Se provo con l'assoluta convergenza mi riduco a studiare $\int_0^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx$

Ora provo con un confronto: $\frac{|\sin x|}{x} \leq \frac{1}{x}$

Ora $\int \frac{1}{x} dx$ con problema a $+\infty$ diverge, quindi BOH (sarebbe andata bene se in partenza avessi avuto $\int \frac{\sin x}{x^a} dx$ con $a > 1$)

Approccio alternativo:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \underbrace{\int_0^5 \frac{\sin x}{x} dx}_{\text{Numero}} + \int_5^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

Studio il restante integrale usando la definizione

$$\begin{aligned}
 \int_5^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_5^A \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_5^A \underbrace{\frac{1}{x}}_F \cdot \underbrace{\sin x}_g dx \\
 &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \left[\underbrace{\frac{1}{x}}_F \underbrace{(-\cos x)}_G \right]_5^A - \int_5^A \underbrace{\left(-\frac{1}{x^2}\right)}_f \underbrace{(-\cos x)}_G dx \\
 &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \left\{ -\frac{\cos A}{A} + \frac{\cos 5}{5} - \int_5^A \frac{\cos x}{x^2} dx \right\} \\
 &= \frac{\cos 5}{5} - \int_5^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx
 \end{aligned}$$

$\downarrow$
 0

essermi spostato in 5 serve per non dover sostituire $x \rightarrow 0$ al denominatore.

Ora

$\int \frac{1}{x^2} dx$ con problema a $+\infty$ converge, quindi $\left(0 \leq \frac{|\cos x|}{x^2} \leq \frac{1}{x^2} + \text{confronto}\right)$

$\int \frac{|\cos x|}{x^2} dx$ converge, quindi (assoluta integrabilità)

$\int \frac{\cos x}{x^2} dx$ converge

Di conseguenza anche $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ converge.

Oss. Lo stesso trucco funziona per integrali del tipo $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^a} dx$ con $a > 0$.

Infatti integrando per parti mi ritrovo x^{a+1} al denominatore.

La stessa cosa va bene anche per integrali del tipo

$\int_b^{+\infty} \frac{\cos x}{x^a} dx$ con $a > 0$ e $b > 0$

Esercizio $\int_0^5 \frac{\cos x}{x} dx$ Questo è improprio!

Inoltre $\frac{\cos x}{x} \sim \frac{1}{x}$ per $x \sim 0$, quindi diverge.

Esempio 2 $\int_0^{+\infty} \cos(x^2) dx$

Il grafico oscilla tra -1 e 1 e
l'effetto di x^2 è di rendere le
oscillazioni sempre più rapide.



Dove si annulla? Dove

$$\cos(x^2) = 0, \text{ cioè } x^2 = \frac{\pi}{2} + k\pi, \text{ cioè } x = \sqrt{\frac{\pi}{2} + k\pi} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \sqrt{2k+1}$$

e $1, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}, \sqrt{9}, \dots$ sono sempre più ravvicinati.

$$\int_0^{+\infty} \cos(x^2) dx = \underbrace{\int_0^5 \cos(x^2) dx}_{\text{Numero}} + \underbrace{\int_5^{+\infty} \cos(x^2) dx}_{\text{Basta studiare questo}}$$

$$\int_5^{+\infty} \cos(x^2) dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_5^A \cos(x^2) dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_5^A \underbrace{\frac{1}{x}}_F \cdot \underbrace{x \cos(x^2)}_g dx$$

$$= \lim_{A \rightarrow +\infty} \left\{ \underbrace{\left[\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{2} \sin(x^2) \right]}_{F \quad G} \right|_5^A - \int_5^A \underbrace{\left(-\frac{1}{x^2} \right)}_F \cdot \underbrace{\frac{1}{2} \sin(x^2)}_G dx \right\}$$

$$= \lim_{A \rightarrow +\infty} \left\{ \underbrace{\frac{\sin(A^2)}{2A}}_0 - \underbrace{\frac{\sin(25)}{10}}_{\text{Numero}} + \frac{1}{2} \int_5^A \frac{\sin(x^2)}{x^2} dx \right\}$$

$$= \text{Numero} + \frac{1}{2} \int_5^{+\infty} \frac{\sin(x^2)}{x^2} dx$$

Ora $\int_5^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ converge $\Rightarrow \int_5^{+\infty} \frac{|\sin(x^2)|}{x^2} dx$ converge $\Rightarrow \int_5^{+\infty} \frac{\sin(x^2)}{x^2} dx$ conv.

$\uparrow$ confronto $\frac{|\sin(x^2)|}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}$
 $\uparrow$ Assoluta integrabilità

Di conseguenza anche $\int_0^{+\infty} \cos(x^2) dx$ converge.

Allo stesso modo si fanno

$$\int_0^{+\infty} \cos(x^a) dx \quad \text{e} \quad \int_0^{+\infty} \sin(x^a) dx \quad \text{perché } a > 1$$

Oss. Cosa succede per $a = 1$?

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \cos x dx &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A \cos x dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} [\sin x]_0^A \\ &= \lim_{A \rightarrow +\infty} (\sin A - \sin 0) = \text{N.E.} \quad (\text{fatto a suo tempo}) \end{aligned}$$

Quindi l'integrale è indeterminato.

Cosa succede per $a = \frac{1}{2}$, cioè per $\int_0^{+\infty} \cos \sqrt{x} dx$. Come prima mi riduco a

$$\int_5^{+\infty} \cos \sqrt{x} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_5^A \cos \sqrt{x} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_5^A \underbrace{\sqrt{x}}_F \underbrace{\frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}}}_g dx$$

$$= \lim_{A \rightarrow +\infty} \left\{ \underbrace{[\sqrt{x} \cdot 2 \sin \sqrt{x}]}_{F \quad G}^A - \int_5^A \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{x}}}_{f} \cdot \underbrace{2 \sin \sqrt{x}}_G dx \right\}$$

$$= \lim_{A \rightarrow +\infty} \left\{ 2\sqrt{A} \sin \sqrt{A} - 2\sqrt{5} \sin \sqrt{5} - \int_5^A \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx \right\} \quad \left[2 \cos \sqrt{x} \right]_5^A$$

$$= \lim_{A \rightarrow +\infty} \left\{ 2\sqrt{A} \sin \sqrt{A} - 2\sqrt{5} \sin \sqrt{5} + \underbrace{2 \cos \sqrt{A}}_{\text{Numero}} - \underbrace{2 \cos \sqrt{5}}_{\text{Numero}} \right\}$$

$$= \text{Numero} + \lim_{A \rightarrow +\infty} 2\sqrt{A} \sin \sqrt{A} + 2 \cos \sqrt{A} = \text{N.E.}$$

Basta scegliere $A_n \rightarrow +\infty$ con $\sin \sqrt{A_n} = 1$

$A_n \rightarrow +\infty$ con $\sin \sqrt{A_n} = 0$.

ANALISI MATEMATICA 1 - LEZIONE 089

Titolo nota

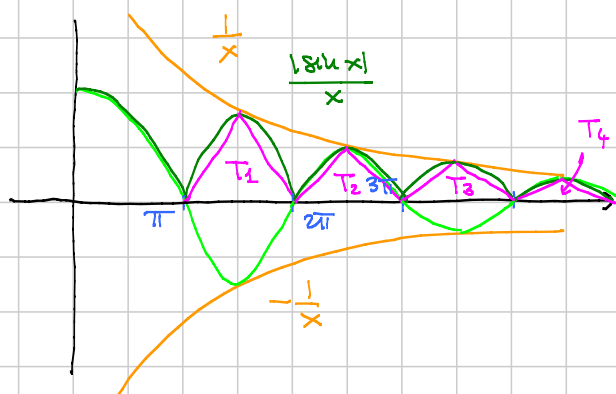
30/11/2012

METODO DEI TRIANGOLINI Le serie aiutano gli integrali

Esempio 1 $\int_0^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx$.

Anche qui se faccio il confronto $0 \leq \frac{|\sin x|}{x} \leq \frac{1}{x}$ non posso concludere nulla in quanto $\int \frac{1}{x} dx$ con problema a $+\infty$ diverge.

Voglio dim. che l'integrale improprio diverge, cioè che l'area sotto il grafico è $+\infty$



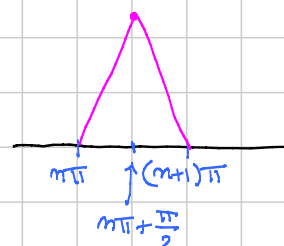
Geometricamente è chiaro che

$$\int_0^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx \geq \text{somma aree triangolini} = \sum_{n=1}^{\infty} \text{Area}(T_n)$$

Base $T_n = \pi$

Altezza T_n = valore della funzione nel p.to medio della base

$$= \frac{|\sin(n\pi + \frac{\pi}{2})|}{n\pi + \frac{\pi}{2}} = \frac{1}{n\pi + \frac{\pi}{2}}$$



Quindi

$$\begin{aligned} \text{Area}(T_n) &= \text{Base} \cdot \text{Altezza} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \pi \frac{1}{n\pi + \frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} \frac{1}{n + \frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2n+1} \end{aligned}$$

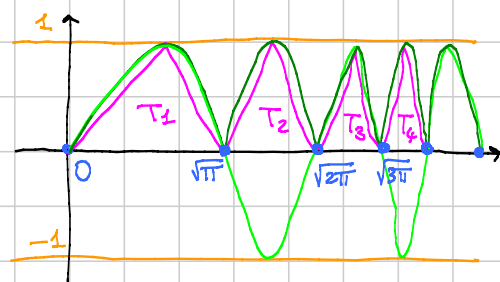
Conclusione

$$\int_0^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx \geq \sum_{n=1}^{\infty} \text{Area}(T_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1} = +\infty$$

↑
C.A. con $\frac{1}{n}$

Esempio 2 $\int_0^{+\infty} |\sin(x^2)| dx$

Voglio dimostrare che l'integrale diverge a $+\infty$. Piazzi sotto dei triangolini.



$$\text{Altezza } (T_n) = 1$$

$$\sin(x^2) = 0 \Leftrightarrow x^2 = k\pi \Leftrightarrow x = \sqrt{k\pi}, \text{ quindi}$$

$$\text{Base } (T_n) = [\sqrt{(n-1)\pi}, \sqrt{n\pi}], \text{ quindi } \text{lunghezza Base} = \sqrt{\pi} (\sqrt{n} - \sqrt{n-1})$$

$$\text{Area } (T_n) = \frac{1}{2} \text{Base} \cdot \text{Altezza} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} (\sqrt{n} - \sqrt{n-1})$$

La conclusione è come prima:

$$\int_0^{+\infty} |\sin(x^2)| dx \geq \sum_{n=1}^{\infty} \text{Area } (T_n) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n} - \sqrt{n-1}) = +\infty$$

$$\text{Infatti } \sqrt{n} - \sqrt{n-1} = (\sqrt{n} - \sqrt{n-1}) \cdot \frac{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}} = \frac{n - (n-1)}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}} = \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}}$$

quindi la serie diverge per confronto asintotico con $\frac{1}{\sqrt{n}}$.

Allo stesso modo si trattano gli integrali del tipo

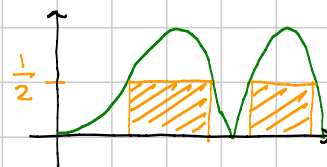
$$\int_0^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x^a} dx \quad \text{con } a \leq 1 \quad \int_0^{+\infty} |\cos(x^a)| dx \quad \int_0^{+\infty} |\sin(x^a)| dx \quad \text{con } a > 0$$

Oss. Ho barato pesantemente... Avevi dovuto dimostrare rigorosamente che i triangolini stanno davvero sotto la funzione.

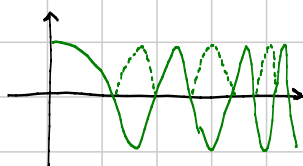


Per stimare la cosa si possono sostituire i triangolini con i rettangolini fatti prendendo ad esempio altezza $\frac{1}{2}$

Le altezze dei rettangoli sono $\frac{1}{2}$, le basi si calcolano imponendo $\sin(x^2) = \frac{1}{2}$...



Oss. Come interpretare che $\int_0^{+\infty} \cos(x^2) dx$ converge e $\int_0^{+\infty} |\cos(x^2)| dx = +\infty$



$\int_0^{+\infty} |\cos(x^2)| dx =$ somma aree, tutte con il segno positivo

$\int_0^{+\infty} \cos(x^2) dx =$ somma aree prese a segno alternato, quindi ci sono "compensazioni".

È lo stesso fenomeno che fa sì che

$$\sum \frac{1}{n} \text{ diverge} \quad \text{e} \quad \sum \frac{(-1)^n}{n} \text{ converge}$$

Oss. Per gli integrali impropri non c'è la condizione necessaria, cioè può accadere che

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx \text{ converge, ma non è vero che } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

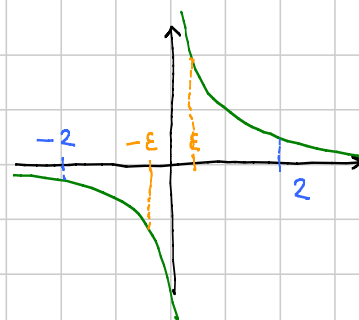
L'esempio è proprio $\int_0^{+\infty} \cos(x^2) dx$

[Si potrebbe dimostrare che il limite non può esistere ed essere $\neq 0$.
L'unica possibilità è che sia 0 oppure non esista].

Oss. Perché $\int_{-2}^2 \frac{1}{x^3} dx$ non è 0?

La funzione sarebbe dispari.

Se uno vuole che $\int \frac{1}{x^3} dx$ fatto su



$[-2, 2] \setminus$ buco di ampiezza piccola intorno a 0 abbia un limite per $\varepsilon \rightarrow 0$, allora questo non si realizza.

Il limite cioè dipende da come ho costruito il buco

$$\int_{-2}^{-\varepsilon} \frac{1}{x^3} dx + \int_{\varepsilon}^2 \frac{1}{x^3} dx \quad (\text{Buco simmetrico})$$

RISULTATI DIVERSI!

$$\int_{-2}^{-\varepsilon} \frac{1}{x^3} dx + \int_{2\varepsilon}^2 \frac{1}{x^3} dx \quad (\text{Buco asimmetrico})$$

$$\int_{-2}^{-\varepsilon} \frac{1}{x^3} dx + \int_{\varepsilon^2}^2 \frac{1}{x^3} dx$$

Questo non accade quando l'integrale converge!

ANALISI MATEMATICA 1 - LEZIONE 090

Titolo nota

01/12/2012

Serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$$

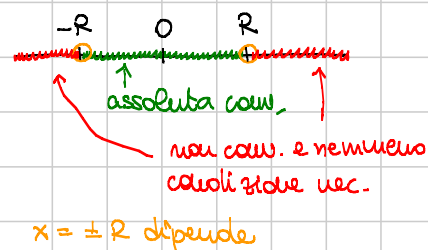
↑
coefficienti

Domande: 1 - per quali x converge
2 - a cosa converge

Risposta domanda 1: raggio di convergenza

$$L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|C_n|} \quad (\text{supposto che esista})$$

$$R = \frac{1}{L}$$

Risposta domanda 2: serie di Taylor: data $f(x)$ si costruisce

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

che è la serie che ha come somme parziali i polinomi di Taylor di $f(x)$.

Per certe funzioni particolari, dette funzioni ANALITICHE, si ha che la serie di Taylor DOVE CONVERGE (cioè all'interno del raggio di convergenza più eventuali estremi) converge proprio a $f(x)$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \quad \text{DOVE CONVERGE}$$

Metateorema: tutte le funzioni ottenute a partire da quelle elementari con operazioni algebriche e/o composizioni sono analitiche dove non presentano problemi burocratici.

Oss. Per dimostrare l'analiticità di una certa funzione spesso si usa Taylor - Lagrange.

Esempio 1 $x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

$$\log(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \dots$$

quindi la serie iniziale (dove converge) converge a $-\log(1-x)$.

Si vede bene che la zona di convergenza è $[-1, 1)$, quindi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\log(1-x) \quad \forall x \in [-1, 1)$$

Esempio 2 $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots = \frac{1}{1-x} \quad \forall x \in (-1, 1)$

Si può vedere in 2 modi: $\rightarrow$ come serie geometrica

$\rightarrow$ come serie di Taylor di $(1-x)^{-1}$

Oss. La derivata della serie dell'esempio 1 è la serie dell'esempio 2

La derivata della somma dell'esempio 1 è la somma dell'esempio 2.

Teorema di scambio per le derivate

La derivata di una serie di Taylor è la serie delle derivate.

$$\left[\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \right]' = \sum_{n=0}^{\infty} n c_n x^{n-1}$$

$\uparrow$
prima la serie, poi la derivata

$\uparrow$
prima la derivata, poi la serie

Inoltre le 2 serie hanno lo stesso raggio di convergenza, ma eventualmente il comportamento negli estremi può cambiare.

Oss. Ci sono degli esempi di serie di funzioni per cui non vale il teo di scambio, cioè la derivata della serie non è la serie delle derivate.

Esempio 3

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \dots$$

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - x^{10} + \dots$$

$$(\arctan x)' = \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \right)'$$

Esempio 4

$$\sum_{n=0}^{\infty} n x^n = x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \dots$$

$$= x (1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots)$$

$$= x (x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots)'$$

$$= x (-1 + 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots)'$$

fatto prima

$$= x \left(-1 + \frac{1}{1-x} \right)'$$

$$= x \left(\frac{-1+x+1}{1-x} \right)' = x \left(\frac{x}{1-x} \right)'$$

$$= x \frac{1-x+x}{(1-x)^2} = \frac{x}{(1-x)^2}$$

Conclusione

$$\sum_{n=0}^{\infty} n x^n = \frac{x}{(1-x)^2}$$

DOVE CONVERGE

(cioè $\forall x \in (-1, 1)$)Questo aiuta a calcolare somme di numeri, per esempio con $x = \frac{1}{2}$

si ottiene che

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n} = \frac{\frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 2$$

Esempio 5

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n}{(n+2)!} \quad (\text{Intanto converge...})$$

La vedo come caso $x=5$ della serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+2)!}$$

$$= \frac{1}{2!} + \frac{x}{3!} + \frac{x^2}{4!} + \frac{x^3}{5!} + \dots = \frac{1}{x^2} \left(\frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \right)$$

 $e^x - 1 - x$

Quindi

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+2)!} = \frac{e^x - 1 - x}{x^2} \quad \text{DOVE CONVERGE } (\forall x \in \mathbb{R})$$

↑
Questa funzione ha un limite ($\frac{1}{2}$) per $x \rightarrow 0$

Ponendo $x = 5$ ho la risposta alla domanda iniziale.

Esempio 6
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{n^2-1} x^{2n+1} = x \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{n^2-1} x^{2n}$$

basta saper fare questa

Posto $y = x^2$, mi ritrovo
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{n^2-1} y^n$$

Ora
$$\frac{n}{n^2-1} = \frac{n}{(n+1)(n-1)} = \frac{A}{n+1} + \frac{B}{n-1} = \frac{An - A + Bn + B}{(n+1)(n-1)}$$

$$\begin{cases} A+B=1 \\ B-A=0 \end{cases} \quad A=B=\frac{1}{2}, \text{ quindi } \frac{n}{n^2-1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n-1} \right), \text{ quindi}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{n^2-1} y^n &= \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{y^n}{n+1} + \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{y^n}{n-1} \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{y} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{y^{n+1}}{n+1} + \frac{1}{2} y \sum_{n=2}^{\infty} \frac{y^{n-1}}{n-1} \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{y} \boxed{\sum_{n=3}^{\infty} \frac{y^n}{n}} + \frac{1}{2} y \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^n}{n}} \\ &\quad -\log(1-y) - y - \frac{y^2}{2} \quad -\log(1-y) \end{aligned}$$

Basta fare le moltiplicazioni e poi mettere x^2 al posto di y .

— o — o —

ANALISI MATEMATICA 1 - LEZIONE 091

Titolo nota

01/12/2012

EQUAZIONI DIFFERENZIALI

È un'equazione in cui l'incognita è una funzione. La funzione deve verificare una relazione che coinvolge la funzione stessa ed un po' di sue derivate.

Esempi $u'(t) + [u(t)]^2 + t \sin u(t) = 0$

L'incognita è una funzione $u(t)$. Si intende che per ogni t appartenente all'insieme di definizione di u deve essere verificata la relazione.

Nota: anche l'insieme di partenza di u è tra le incognite.

L'insieme di arrivo è sempre $\mathbb{R}$.

$$u''(t) + u'''(t) + t^3 + u^4(t) = 0 \quad \text{Comparsa derivate 2° e 3°.}$$

Def. Si dice ORDINE di un'eq. diff. il massimo ordine di derivazione che compare.

In astratto un'eq. diff. di ordine k si presenta nella forma

$$\Phi(u^{(k)}(t), u^{(k-1)}(t), \dots, u'(t), u(t), t) = 0$$

per una opportuna funzione Φ .

Def. Un'eq. diff. si dice in FORMA NORMALE se la derivata di ordine massimo è "ricavata" rispetto al resto, cioè l'eq. si presenta nella forma

$$u^{(k)}(t) = F(u^{(k-1)}(t), \dots, u'(t), u(t), t)$$

Esempi

$$u''(t) = [u'(t)]^2 + \cos t$$

Ok: in forma normale

$$[u'(t)]^3 + \cos u(t) = t^2$$

Non è in forma normale, ma è facile portarcela

$$u'(t) = \sqrt[3]{t^2 - \cos u(t)}$$

$$[u'(t)]^2 = u(t)$$

Non è in forma normale e non è possibile portarcela in maniera univoca.

Notazione rapidaOmettere l'esplicita dipendenza da t . I 3 esempi precedenti diventano

$$u'' = [u']^2 + \cos t$$

$$(u')^3 + \cos u = t^2$$

$$(u')^2 = u$$

↑
rimane perché non
è argomento della u o
di qualche sua derivata.

Def. Un'eq. diff. si dice AUTONOMA se la t compare solo come argomento della u e delle sue derivate (quindi in notazione rapida non c'è proprio).

Altrimenti si dice NON AUTONOMA.

— o — o —

Nel corso esamineremo 3 situazioni speciali

1° CASO Equazioni del 1° ordine a variabili separabili

Sono eq. diff. del 1° ordine in forma normale, in cui il termine a dx è il prodotto di una funzione della sola t per una funzione della sola u .

$$u' = F(u, t)$$

Forma normale

$$u' = f(t) \cdot g(u)$$

1° ISOLA

Esempi

$$u' + t = tu$$

$$\downarrow$$

$$u' = t(u-1)$$

OK

$$u' = t^2 \cdot u^3$$

OK subito

$$u' = u^4$$

$$\downarrow$$

$$u' = \underbrace{1}_{f(t)} \cdot \underbrace{u^4}_{g(u)}$$

Forma generale: tutte le eq. diff. del 1° ordine in forma normale AUTONOME si scrivono come

$$u' = \varphi(u) = \underbrace{1}_{f(t)} \cdot \underbrace{\varphi(u)}_{g(u)}$$

quindi sono anche a VARIABILI SEPARABILI.

Def. Un'eq. diff. si dice LINEARE se "la u e le sue derivate compaiono di 1° grado e non all'interno di funzioni", cioè se è della forma

$$a_k(t) u^{(k)} + a_{k-1}(t) u^{(k-1)} + \dots + a_1(t) u' + a_0(t) u = f(t)$$

$$\sum_{n=0}^k \underbrace{a_n(t)}_{\text{coeff.}} u^{(n)} = \underbrace{f(t)}_{\text{termine noto}}$$

↑
A sx c'è una comb. lineare di u e delle sue derivate con coeff. che possono dipendere da t .

Un'eq. diff. lineare si dice OMOGENEA se $f(t) \equiv 0$.

Esempi

$$\underbrace{1}_{a_2(t)} u'' + \underbrace{3t}_{a_1(t)} u' + \underbrace{t^2}_{a_0(t)} u = \underbrace{\sin t}_{f(t)}$$

$$u' + t^2 u = t^3$$

↑
lineare

$$u' + t u^2 = t^3$$

↑
colpevole della NON linearità

$$u' + \cos(tu) = t^3$$

↑
NON LINEARE perché si compaiono all'interno di una funzione

$$u'' + u' u = 0$$

↑
NON LINEARE

Def. Un'eq. diff. lineare si dice A COEFFICIENTI COSTANTI se i coeff. $a_k(t), a_{k-1}(t), \dots, a_1(t), a_0(t)$ non dipendono da t ma sono dei numeri, cioè delle costanti.

Oss. → Un'eq. diff. lin. a coeff. costanti è autonoma?

NO! Può esserci $f(t)$!!!

→ Un'eq. diff. lin. autonoma è omogenea?

NO! Infatti $f(t)$ può essere una costante $\neq 0$, ad esempio
 $u'' + u' = 7$

2° caso Eq. del 1° ordine lineari $a_1(t) u' + a_0(t) u = f(t)$
 Supponendo di poter dividere per $a_1(t)$, l'eq. diventa della forma

$$u' + a(t)u = b(t)$$

3° caso Eq. lineari di ordine k a coeff. costanti, omogenee e non omog.

$$\sum_{n=0}^k a_n u^{(n)} = f(t)$$

$$a_k u^{(k)} + \dots + a_1 u' + a_0 u = f(t)$$

Esempi $u'' = tu' + t^2 u + \sin t$ lineare, 2° ordine, forma normale, non autonoma, coeff. non costanti

$u''' = 7u + \sin t \rightarrow$ rientra nel 3° caso

$u' + tu = t \rightarrow$ rientra nel 2° caso

$\rightarrow$ rientra nel 1° caso

$$u' = t(1-u) \quad \begin{matrix} f(t) & g(u) \\ \downarrow & \downarrow \\ & (1-u) \end{matrix}$$

$u' = -7u \rightarrow$ 1° ordine, lineare, autonoma, omogenea.
 Rientra in tutti i 3 casi.

ANALISI MATEMATICA 1 - LEZIONE 092

Titolo nota

01/12/2012

Esempio 1 $u' = 2u$ Cerco una funzione la cui derivata sia il doppio di se stessa.

Una possibile soluzione è $u(t) = e^{2t}$

Un'altra soluzione è $u(t) = 8e^{2t}$

In realtà $u(t) = ce^{2t}$ è una soluzione per ogni $c \in \mathbb{R}$. In questo caso non ci sono altre soluzioni.

Esempio 2 $u'' = -u$

Una soluzione è $u(t) = \sin t$, Un'altra è $u(t) = \cos t$

Una famiglia infinita di soluzioni è $u(t) = c \sin t$ con $c \in \mathbb{R}$.

In realtà le funzioni del tipo

$$u(t) = a \cos t + b \sin t$$

sono tutte e sole le soluzioni dell'equazione. Non solo sono infinite, ma posso giocare su 2 parametri.

Esempio 3 $u' = -u^2$ Una soluzione è $u(t) = \frac{1}{t}$ (sostituire!)

Le funzioni $u(t) = \frac{1}{t+c}$, al variare di $c \in \mathbb{R}$, sono tutte e sole le soluzioni dell'eq.

Fatto generale Di solito un'eq. diff. ha infinite soluzioni dipendenti da un numero di parametri uguale all'ordine dell'eq. I parametri possono comparire ovunque nell'espressione.

PROBLEMA DI CAUCHY

Problema di Cauchy = equazione diff. + condizioni iniziali.

Le condizioni iniziali, per un'eq. di ordine k , prescrivono il valore di u e di tutte le sue derivate fino alla $(k-1)$ -esima per uno stesso valore di t .

Esempi Per un'eq. del 1° ordine il pb. di Cauchy si presenta così:

$$\begin{cases} u' = f(t, u) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

↑
numeri dati

Risolvere il problema di Cauchy vuol dire trovare, tra le infinite soluzioni dell'eq., quella o quelle che verificano la condizione iniziale

$$\begin{cases} u' = 2u \\ u(3) = 5 \end{cases}$$

$u(t) = c e^{2t}$ sono le infinite soluzioni
 $u(3) = 5$ diventa $c e^6 = 5$, da cui $c = 5 \cdot e^{-6}$
 Quindi il problema di Cauchy ha soluzione unica
 $u(t) = 5 e^{-6} \cdot e^{2t}$
 $= 5 e^{2t-6}$

Per un'eq. del 2° ordine il problema di Cauchy si presenta come

$$\begin{cases} u'' = f(u', u, t) \\ u(t_0) = u_0 \\ u'(t_0) = u_1 \end{cases}$$

Si intende che t_0, u_0, u_1 sono numeri dati

$$\begin{cases} u'' + 3u' + 5u = \sin t \\ u(2) = 5 \\ u'(2) = 7 \end{cases}$$



Problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dots \\ u(2) = 5 \\ u'(3) = 5 \end{cases}$$



NO Problema di Cauchy

DIVERSI

$$\begin{cases} \dots \\ u(2) = 5 \\ u''(2) = 7 \end{cases}$$



NO problema di Cauchy: devo dare u e u'

Oss. In generale: per un'eq. diff. di ordine k ci aspettiamo una sol. generale dipendente da k parametri.

Il problema di Cauchy impone k equazioni.

Di solito le k equazioni permettono di determinare in maniera univoca il valore dei k parametri.

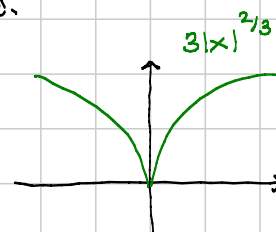
Teorema di ESISTENZA Consideriamo il problema di Cauchy per un'eq. diff. di ordine k in FORMA NORMALE

$$\begin{cases} u^{(k)} = F(u^{(k-1)}, \dots, u', u, t) \\ u(t_0) = u_0 \\ u'(t_0) = u_1 \\ \vdots \\ u^{(k-1)}(t_0) = u_{k-1} \end{cases} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} k \text{ condizioni iniziali}$$

Se la funzione F è continua, allora il problema ha almeno una soluzione LOCALE, cioè una soluzione $u: (a,b) \rightarrow \mathbb{R}$ con $t_0 \in (a,b)$.

Teorema di ESISTENZA e UNICITÀ Se F è un po' meglio di continua (diciamo derivabile), allora la soluzione del problema di Cauchy è UNICA, cioè le condizioni iniziali permettono di determinare univocamente i parametri.

Esempio Considero il problema
$$\begin{cases} u' = 3|u|^{2/3} \\ u(0) = 0 \end{cases}$$



La funzione $f(x) = |x|^{2/3}$ è continua, ma non derivabile.

Una soluzione è $u(t) \equiv 0$ (funzione che vale sempre 0: verifica!).

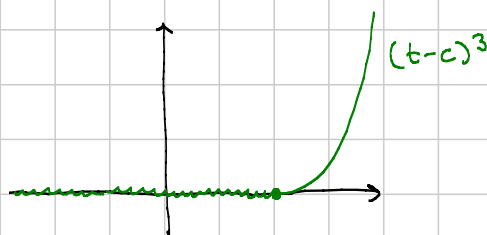
Un'altra soluzione è $u(t) = t^3$. Verifica: $u(0) = 0$

$$u'(t) = 3t^2$$

$$3|u(t)|^{2/3} = 3|t^3|^{2/3} = 3t^2$$

In questo caso ci sono solo 2 soluzioni, ma ce ne sono infinite, ad esempio quelle fatte così:

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } t \leq c \\ (t-c)^3 & \text{per } t \geq c \end{cases} \quad \text{con } c > 0$$



Esercizio: verificare che sono soluzioni.

— o — o —

ANALISI MATEMATICA 1 - LEZIONE 093

Titolo nota

05/12/2012

Equazioni diff. a variabili separabili

$$u' = f(t)g(u)$$

Esempio $u' = u^2 \cos t$

① Separare

② Integrare

③ Ricavare

① Separare

$$\frac{du}{dt} = u^2 \cos t$$

Tutte le u a sx , tutte le t a dx

$$\frac{du}{u^2} = \cos t \, dt$$

② Integrare Asx rispetto alla variabile u , a dx rispetto alla variabile t

$$\int \frac{du}{u^2} = \int \cos t \, dt \quad -\frac{1}{u} = +\sin t + c$$

③ Ricavare Ricavare u in funzione di t

$$\frac{1}{u} = \sin t + c$$

Mettere $+c$ o $-c$ è la stessa cosa visto che c è una costante arbitraria

Quindi

$$u(t) = \frac{1}{-\sin t + c}$$

Soluzione generale dell'eq. diff.: al variare di c rappresenta le infinite soluzioni

Supponiamo ora di avere anche una condizione iniziale

$$\begin{cases} u' = u^2 \cdot \cos t \\ u(0) = 5 \end{cases}$$

④ Determinare c in modo da soddisfare la cond. iniz.

$$u(0) = 5$$

$$\frac{1}{\sin 0 + c}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{c} = 5 \Rightarrow c = \frac{1}{5}$$

Posso ora scrivere la soluzione (unica) del problema di Cauchy:

$$u(t) = \frac{1}{-\sin t + \frac{1}{5}}$$

$$u(t) = \frac{5}{-5 \sin t + 1}$$

Soluzione problema di Cauchy

⑤ Verifica! (sia dell'eq., sia della cond. iniz.)

$$u(0) = \frac{5}{1} = 5 \quad \text{OK.}$$

$$u'(t) = \frac{-5}{(-5 \sin t + 1)^2} (-5 \cos t) \\ = \frac{25 \cos t}{(-5 \sin t + 1)^2} = [u(t)]^2 \cdot \cos t$$

⑥ Studio della soluzione ottenuta

$$u(t) = \frac{5}{1 - 5 \sin t}$$

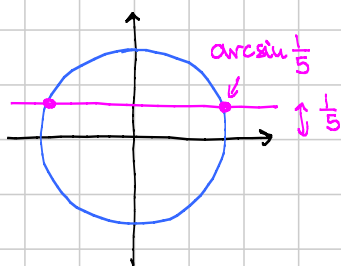
Def. Si dice intervallo massimale di esistenza il pezzo dell'insieme di definizione di $u(t)$ che contiene il tempo iniziale.

Nell'esempio la soluzione $u(t)$ è definita per $1 - 5 \sin t \neq 0$, $\sin t \neq \frac{1}{5}$.

Ora $\sin t = \frac{1}{5}$ se e solo se

$$t = \arcsin \frac{1}{5} + 2k\pi$$

$$t = \pi - \arcsin \frac{1}{5} + 2k\pi$$



Quindi nel nostro caso la funzione è definita per valori di t diversi dai precedenti



Intervallo massimale di esistenza = $(-\pi - \arcsin \frac{1}{5}, \arcsin \frac{1}{5})$.

— o — o —

Esempio 2

$$\begin{cases} u' = u^2 t^3 \\ u(0) = 7 \end{cases}$$

① Separare $\frac{du}{dt} = u^2 t^3$; $\frac{du}{u^2} = t^3 dt$

② Integrare $\int \frac{du}{u^2} = \int t^3 dt$

$$-\frac{1}{u} = \frac{1}{4} t^4 + c$$

③ Ricavare $\frac{1}{u} = -\frac{1}{4} t^4 + c$ da cui $u(t) = \frac{1}{-\frac{1}{4} t^4 + c} = \frac{4}{-t^4 + c}$

$$u(t) = \frac{4}{c - t^4}$$

Soluzione generale dell'eq. diff.

si scrive c

④ Determinare c Impongo $u(0) = 7$, cioè $\frac{4}{c} = 7$, cioè $c = \frac{4}{7}$

da cui $u(t) = \frac{4}{\frac{4}{7} - t^4} = \frac{28}{4 - 7t^4}$

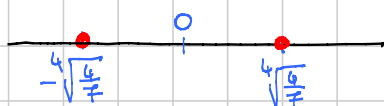
$$u(t) = \frac{28}{4 - 7t^4}$$

Soluzione
problema di
Cauchy

⑤ Verifica $u(0) = \frac{28}{4}$ ok, $u'(t) = -\frac{28}{(4 - 7t^4)^2} (-7 \cdot 4 \cdot t^3)$
 $= \frac{28^2}{(4 - 7t^4)^2} \cdot t^3 = [u(t)]^2 \cdot t^3$ ok

⑥ Studiare la soluzione La funzione $u(t)$ è definita quando

$$4 - 7t^4 \neq 0, \text{ cioè } 7t^4 \neq 4, \text{ cioè } t^4 \neq \frac{4}{7}, \text{ cioè } t \neq \pm \sqrt[4]{\frac{4}{7}} = \pm \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{7}}$$



L'intervallo massimale di esistenza è il pezzo dell'insieme di definizione che contiene il tempo iniziale $t=0$, cioè nel nostro caso l'intervallo

$$\left(-\sqrt[4]{\frac{4}{7}}, \sqrt[4]{\frac{4}{7}}\right)$$

Def. Si dice tempo di vita (LIFE SPAN) della soluzione (nel futuro) il sup dell'intervallo massimale di esistenza. Nell'esempio

$$\text{Tempo di vita} = \sqrt[4]{\frac{4}{7}}$$

Ora ci sono vari casi:

→ se il tempo di vita è $+\infty$ si dice che la soluzione ha ESISTENZA GLOBALE nel futuro

→ se il tempo di vita è $< +\infty$ (cioè è un numero T), allora si dice che la soluzione MUORE al tempo T e a quel punto ci sono 2 possibili cause:

1 - se $\lim_{t \rightarrow T^-} u(t) = \pm \infty$, si dice che la soluzione ha BLOW-UP al tempo T
scoppiaimento

Nell'esempio si ha che $\lim_{t \rightarrow \sqrt[4]{\frac{4}{7}}^-} u(t) = \lim_{t \rightarrow \dots} \frac{28}{4-7t^4} = +\infty$ ↑ $[\frac{28}{0^+}]$

quindi nell'esempio si dice che la soluzione ha blow-up per $T = \sqrt[4]{\frac{4}{7}}$.

2 - se non c'è blow-up, ma "u(t) esce dalla zona in cui il termine a dx dell'eq. è definito", allora si dice che la solus. ha

BREAK DOWN

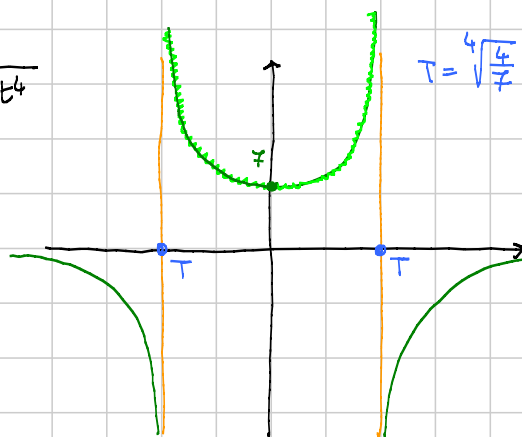
↑ rottura

In genere, ma non sempre, questo vuol dire che

$$\lim_{t \rightarrow T^-} u'(t) = \pm \infty$$

Non scoppia la funzione,
ma scoppia la derivata.

Torniamo all'esempio: $u(t) = \frac{28}{4-7t^4}$



Nei modelli "mondo reale"

l'intervallo massimale di esistenza descrive il più grande insieme di tempi nei quali il risultato del modello può essere attendibile.

ANALISI MATEMATICA 1 - LEZIONE 094

Titolo nota

05/12/2012

Esempio 1 $\begin{cases} u' = \frac{u^2}{1+t^2} \\ u(0) = \frac{1}{7} \end{cases}$ ① Separare: $\frac{du}{dt} = \frac{u^2}{1+t^2} \quad \frac{du}{u^2} = \frac{dt}{1+t^2}$

② Integrare: $\int \frac{du}{u^2} = \int \frac{dt}{1+t^2}$

$$-\frac{1}{u} = \arctan t + c \Rightarrow \frac{1}{u} = -\arctan t + c$$

③ Ricavare

$$u(t) = \frac{1}{c - \arctan t}$$

Sol. gen.
eq. diff.④ Determinare c

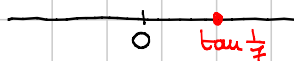
$$u(0) = \frac{1}{c} = \frac{1}{7} \Rightarrow c = \frac{1}{7}$$

$$u(t) = \frac{1}{\frac{1}{7} - \arctan t}$$

$$u(t) = \frac{7}{1 - 7 \arctan t}$$

Sol. problema
di Cauchy⑤ Verifica: fare!⑥ Studiare la soluzione.

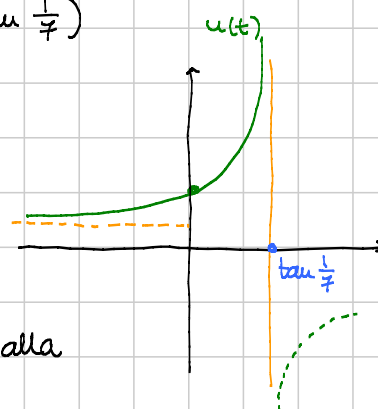
Ci sono problemi quando $1 - 7 \arctan t = 0$, cioè $\arctan t = \frac{1}{7}$, cioè
 $t = \tan \frac{1}{7}$



Intervallo massimale di esistenza = $(-\infty, \tan \frac{1}{7})$

Quindi LIFE SPAN = $\tan \frac{1}{7}$. Ora

$$\lim_{t \rightarrow T^-} u(t) = \left[\frac{7}{0^+} \right] = +\infty \text{ quindi c'è blow-up.}$$

Esempio 2

$$\begin{cases} u' = \frac{u^2}{t^2+1} \\ u(0) = \frac{1}{7} \end{cases}$$

Tutto uguale fino alla
formula generale

$$u(t) = \frac{1}{c - \arctan t}$$

④ Determino il nuovo c : $u(0) = \frac{1}{c} = \frac{1}{7} \Rightarrow c = 7$

$$u(t) = \frac{1}{7 - \arctan t}$$

Soluzione unico
problema di Cauchy

⑤ Verifica: fare!

⑥ Studiare la soluzione Ora $u(t)$ è definita per ogni $t \in \mathbb{R}$ in quanto $7 - \arctan t > 7 - \frac{\pi}{2} > 0$ sempre.

In questo caso c'è esistenza globale, sia nel passato, sia nel futuro

Oss. La stessa equazione, cambiando le condizioni iniziali, fornisce soluzioni dal comportamento completamente diverso.

Esempio 2 in versione parametrica $u' = \frac{u^2}{1+t^2}$ $u(0) = \alpha$

Vedere che succede al variare di α . Come prima $u(t) = \frac{1}{c - \arctan t}$

Impongo $u(0) = \alpha$: $\frac{1}{c} = \alpha$, quindi $c = \frac{1}{\alpha}$, quindi

$$u(t) = \frac{1}{\frac{1}{\alpha} - \arctan t}$$

$$= \frac{\alpha}{1 - \alpha \arctan t}$$

Soluzione del problema di Cauchy
in funzione del dato iniziale

⑥ Studiare al variare di α . Ci sono problemi quando $\arctan t = \frac{1}{\alpha}$.

Questa equazione ha soluzione se e solo se

$$\frac{1}{\alpha} \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$-\frac{\pi}{2} < \frac{1}{\alpha} < \frac{\pi}{2}$$

cioè se e solo se $\alpha > \frac{2}{\pi}$ oppure $\alpha < -\frac{2}{\pi}$

Per i restanti valori di α , cioè per $\alpha \in \left[-\frac{2}{\pi}, \frac{2}{\pi}\right]$ si ha che c'è esistenza globale.

Esempio 3 $u' = \frac{u^2}{1+t^2}$ $u(0) = 0$ Come sempre $u(t) = \frac{1}{c - \arctan t}$

Determino c : $u(0) = \frac{1}{c} = 0 \dots$ c'è un problema...

Noi sappiamo che la soluzione c'è per forza, grazie al teo. di esistenza ed unicità. In questi casi la soluzione è banale, ed è la costante $u(t) = 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. La verifica è ovvia: $0 = 0$. Ovviamente l'intervallo massimale di esistenza è tutto $\mathbb{R}$.

Esempio 4 $\begin{cases} u' = u^3 t^2 \\ u(0) = -3 \end{cases}$ ① Separare: $\frac{du}{dt} = u^3 t^2$; $\frac{du}{u^3} = t^2 dt$

② Integrare: $-\frac{1}{2} \frac{1}{u^2} = \frac{1}{3} t^3 + c$

③ Ricavare: $\frac{1}{2} \frac{1}{u^2} = -\frac{1}{3} t^3 + c$, $\frac{1}{u^2} = -\frac{2}{3} t^3 + c$

$u^2 = \frac{1}{-\frac{2}{3} t^3 + c}$ $u(t) = \frac{1}{\pm \sqrt{-\frac{2}{3} t^3 + c}} = \frac{\sqrt{3}}{\pm \sqrt{c - 2t^3}}$

Questa è la formula per la soluzione generale dell'eq. diff.

④ Determinare c : $-3 = u(0) = \frac{\sqrt{3}}{\pm \sqrt{c}}$ Se prendo il segno + non lo speranze! a sx è < 0 , a dx è > 0 .

Quindi devo prendere il segno -:

$-3 = \frac{\sqrt{3}}{-\sqrt{c}}$, $3 = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{c}}$, $9 = \frac{3}{c}$, $c = \frac{1}{3}$

Soluzione del problema di Cauchy: $u(t) = \frac{\sqrt{3}}{-\sqrt{\frac{1}{3} - 2t^3}} = \frac{-3}{\sqrt{1 - 6t^3}}$

Oss. Per scegliere il segno $\pm$ si prende quello che permette di determinare il valore di c sulla base della condizione iniziale.

⑤ Definita dove $1 - 6t^3 > 0$, cioè $t^3 < \frac{1}{6}$, cioè $t < \sqrt[3]{\frac{1}{6}} = T$
la soluzione ha esistenza globale nel passato e nel futuro ha blow-up per $T = \sqrt[3]{\frac{1}{6}}$.

Esempio 5 $\begin{cases} u' = u t^2 \\ u(0) = -3 \end{cases}$

① $\frac{du}{dt} = u t^2 \quad \frac{du}{u} = t^2 dt$

② $\int \frac{du}{u} = \int t^2 dt \quad ; \quad \log |u| = \frac{1}{3} t^3 + c$

③ $\log |u(t)| = \frac{1}{3} t^3 + c \Rightarrow |u(t)| = e^{\frac{1}{3} t^3 + c}$

$\Rightarrow u(t) = \pm e^{\frac{1}{3} t^3 + c}$

④ Determino c $-3 = u(0) = \pm e^c$. Scelgo segno -

$3 = e^c \Rightarrow c = \log 3 \Rightarrow u(t) = -e^{\frac{1}{3} t^3 + \log 3} = -3 e^{\frac{1}{3} t^3}$
 $\uparrow$
 percorso

Esempio 6 $u' = -\frac{1}{u} \quad u(0) = 5 \quad$ ① Separare $\frac{du}{dt} = -\frac{1}{u} ; u du = -dt$

② Integrare $\int u du = -\int dt \quad ; \quad \frac{1}{2} u^2 = -t + c$

③ Ricavare $u^2 = -2t + c \Rightarrow u(t) = \pm \sqrt{c - 2t}$

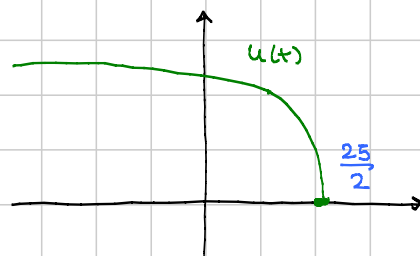
④ Determino c : scelgo segno + ; $5 = u(0) = \sqrt{c} \Rightarrow c = 25$

Quindi $u(t) = \sqrt{25 - 2t}$ Sol. problema di Cauchy

⑥ Definita quando $25 - 2t \geq 0$, cioè $2t \leq 25$, cioè $t \leq \frac{25}{2} = T$

Cosa succede quando $t \rightarrow \frac{25}{2}^-$

$\lim_{t \rightarrow T^-} u(t) = 0 \rightarrow \text{NO BLOW-UP}$



In questo caso $u \rightarrow$ alla zona dove $\frac{1}{u}$ ha problemi e anche si vede che $u'(t) \rightarrow -\infty$. C'è BREAK DOWN,

ANALISI MATEMATICA 1 - LEZIONE 095

Titolo nota

06/12/2012

EQUAZIONI DIFFERENZIALI LINEARI OMOGENEE

$$a_m(t) u^{(m)} + a_{m-1}(t) u^{(m-1)} + \dots + a_1(t) u' + a_0(t) u = 0$$

$$\sum_{k=0}^m a_k(t) u^{(k)} = 0$$

Teoria generale L'insieme delle soluzioni di un'eq. diff. lin. omogenea è uno spazio vettoriale di dimensione n .

Detta $u_1(t), \dots, u_n(t)$ una base di tale spazio, la soluzione generale si scrive come combinazione lineare, cioè nella forma

$$u(t) = c_1 u_1(t) + c_2 u_2(t) + \dots + c_n u_n(t)$$

Si intende che $c_1, \dots, c_n$ sono i parametri liberi

Operativamente : se conosco una base, conosco la soluzione generale

Dim. Per dim. che è uno spazio vettoriale occorrono 2 verifiche

① La somma di soluzioni è ancora soluzione. Siano u e v 2 soluzioni, e sia $w = u + v$. Allora per ogni $k \in \mathbb{N}$ si ha che $w^{(k)} = u^{(k)} + v^{(k)}$. Allora

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^m a_k(t) w^{(k)}(t) &= \sum_{k=0}^m a_k(t) [u^{(k)}(t) + v^{(k)}(t)] \\ &= \underbrace{\sum_{k=0}^m a_k(t) u^{(k)}(t)}_{=0 \text{ perché } u \text{ è soluzione}} + \underbrace{\sum_{k=0}^m a_k(t) v^{(k)}(t)}_{=0 \text{ perché } v \text{ è soluzione}} = 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

Quindi anche w è solut.

② Il prodotto di una sol. per una costante λ è ancora sol.

Sia u una sol., e sia $w = \lambda u$. Allora per ogni $k \in \mathbb{N}$ si ha che

$$w^{(k)}(t) = \lambda u^{(k)}(t), \text{ quindi}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(t) w^{(k)}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(t) \lambda u^{(k)}(t) = \lambda \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} a_k(t) u^{(k)}(t)}_{=0 \text{ perché } u \text{ è soluzione}} = 0$$

Bisogna ora dimostrare che la dimensione dello spazio è n . Bisogna trovare una base fatta da n elementi. Considero il problema di Cauchy per l'equazione usando come dato iniziale una cosa del tipo $0, \dots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{posizione } k}}{1}, 0, \dots, 0$

chiamo u_k la soluzione corrispondente. Dico che è una base. Anche qui devo fare 2 verifiche.

① Genera tutto, cioè ogni altra soluzione è comb. lineare di $u_1, \dots, u_n$.

Facile, perché la soluzione con dato iniziale $d_1, \dots, d_n$ sarà

$$d_1 u_1(t) + \dots + d_n u_n(t)$$

e questa verifica sia le condizioni, sia l'equazione.

② Sono linearmente indipendenti, cioè ogni combinazione lineare nulla ha tutti i coeff. nulli. Prendiamo una qualunque comb. lineare

$$c_1 u_1(t) + \dots + c_n u_n(t) = u(t)$$

e supponiamo che sia sempre 0. In particolare all'istante iniziale t_0

$$\begin{aligned} \text{si avrà che } u^{(k)}(t_0) &= 0. \text{ Ma } u^{(k)}(t_0) = c_1 u_1^{(k)}(t_0) + \dots + c_n u_n^{(k)}(t_0) \\ &= c_k u_k^{(k)}(t_0) = c_k \end{aligned}$$

$\uparrow$
tutte le altre fanno 0

Quindi tutti i coeff. sono nulli.

— 0 — 0 —

Fatto generale Per un'eq. diff. lineare omogenea l'intervallo massimale di esistenza è il più grande intervallo (o semiretta o tutto $\mathbb{R}$) che contiene il tempo iniziale t_0 e dove sono definiti tutti i coeff.

Se non hanno problemi i coeff. $a_k(t)$, non ha problemi la soluzione.

Come determinare una base dello spazio delle soluzioni

Esiste un algoritmo per farlo se l'eq. è anche a coeff. costanti.

Caso delle equazioni di ordine 2

$$au'' + bu' + cu = 0$$

Considero il polinomio associato all'equazione $ax^2 + bx + c$, che si chiama polinomio caratteristico. Considero le radici del polinomio. Ci sono 3 casi.

1° caso $\Delta > 0$. Il polinomio ha 2 radici reali distinte: λ, μ .

Allora una base è $e^{\lambda t}$, $e^{\mu t}$, quindi la soluzione generale è

$$u(t) = c_1 e^{\lambda t} + c_2 e^{\mu t}$$

2° caso $\Delta = 0$. Il polinomio ha una radice reale λ di molteplicità 2.

Allora una base è $e^{\lambda t}$, $t e^{\lambda t}$, quindi la soluzione generale è

$$u(t) = c_1 e^{\lambda t} + c_2 t e^{\lambda t}$$

Oss. I due elementi $e^{\lambda t}$ e $t e^{\lambda t}$ non sono linearmente dipendenti. Per esserlo uno dovrebbe essere uguale all'altro moltiplicato per una costante, non per una funzione di t !!!

3° caso $\Delta < 0$. Il polinomio non ha radici reali, ma ha 2 radici complesse coniugate $\alpha \pm i\beta$. Allora una base è

$e^{\alpha t} \cos(\beta t)$, $e^{\alpha t} \sin(\beta t)$, quindi la soluzione generale è

$$u(t) = c_1 e^{\alpha t} \cos(\beta t) + c_2 e^{\alpha t} \sin(\beta t)$$

Per le equazioni di ordine n a coeff. costanti omogenee

$$\sum_{k=0}^n a_k u^{(k)} = 0$$

↑
numeri

la situazione è analoga. Si prende il pol. caratteristico $\sum_{k=0}^n a_k x^k$ e si vanno a vedere le radici. Quindi

→ ogni radice $\lambda \in \mathbb{R}$ di mult. 1 produce l'elemento $e^{\lambda t}$

→ ogni radice $\lambda \in \mathbb{R}$ di mult. m produce m elementi della base:

$$e^{\lambda t}, t e^{\lambda t}, t^2 e^{\lambda t}, \dots, t^{m-1} e^{\lambda t}$$

→ ogni coppia di radici complesse coniugate $\alpha \pm i\beta$ di mult. 1 produce due elementi della base

$$e^{\alpha t} \cos(\beta t), e^{\alpha t} \sin(\beta t)$$

→ ogni coppia $\alpha \pm i\beta$ di molteplicità m produce $2m$ elementi della base

$$e^{\alpha t} \cos(\beta t), e^{\alpha t} \sin(\beta t), t e^{\alpha t} \cos(\beta t), t e^{\alpha t} \sin(\beta t), \dots,$$

$$t^{m-1} e^{\alpha t} \cos(\beta t), t^{m-1} e^{\alpha t} \sin(\beta t).$$

Oss. Gli elementi della base prodotti sono sempre esattamente n .

— o — o —

ANALISI MATEMATICA 1 - LEZIONE 096

Titolo nota

06/12/2012

Esempio 1 $u'' - 4u' - 5u = 0$ Equazione
 $x^2 - 4x - 5 = 0$ Polinomio
 $(x-5)(x+1) = 0$ $x = -1, x = 5$ Radici
 e^{-t}, e^{5t} Base

Sol. generale: $u(t) = a e^{-t} + b e^{5t}$

Esempio 2 $u'' - 4u' + 4u = 0$ Equazione
 $x^2 - 4x + 4 = 0$ Polinomio
 $(x-2)^2 = 0$ $x = 2$ radice di molteplicità 2
 $e^{2t}, t e^{2t}$

Sol. generale: $u(t) = a e^{2t} + b t e^{2t} = (a + b t) e^{2t}$

Esempio 3 $u'' + 10u' + 29u = 0$ Equazione
 $x^2 + 10x + 29 = 0$ Polinomio

$$x_{1,2} = -5 \pm \sqrt{25 - 29} = -5 \pm \sqrt{-4} = -5 \pm 2i$$

Quindi abbiamo 2 radici complesse coniugate $\alpha \pm i\beta$ con $\alpha = -5$ e $\beta = 2$

$e^{-5t} \cos(2t), e^{-5t} \sin(2t)$ Base

Sol. generale: $u(t) = a e^{-5t} \cos(2t) + b e^{-5t} \sin(2t)$

Esempio 4 $u'' + 4u' = 0$ Equazione
 $x^2 + 4x = 0$ Polinomio
 $x(x+4) = 0$ $x = 0, x = -4$ Radici
 $e^{-4t}, e^{0t} = 1$ Base

Sol. generale: $u(t) = a e^{-4t} + b$

<u>Esempio 5</u>	$u'' - 4u = 0$ $x^2 - 4 = 0$ $x = \pm 2$ e^{2t}, e^{-2t}	Equazione Polinomio Radici Base
Sol. generale	$u(t) = ae^{2t} + be^{-2t}$	
<u>Esempio 6</u>	$u'' + 4u = 0$ $x^2 + 4 = 0$ $x^2 = -4 \quad x = \pm 2i$ $\alpha \pm i\beta$ con $\alpha = 0$ e $\beta = 2$ $e^{0t} \cos(2t), e^{0t} \sin(2t)$	Equazione Polinomio Radici Base
Sol. generale :	$u(t) = a \cos(2t) + b \sin(2t)$	
<u>Esempio 7</u>	$u^{(4)} + 9u'' = 0$ $x^4 + 9x^2 = 0$ $x^2(x^2 + 9) = 0$ Le radici sono $x = 0$ (multiplicità 2) e $x = \pm 3i$ Base : $e^{0t}, t e^{0t}, e^{0t} \cos(3t), e^{0t} \sin(3t)$	Equazione Polinomio
Sol. generale :	$u(t) = a + bt + c \cos(3t) + d \sin(3t)$	
<u>Esempio 8</u>	$u^{(4)} + 2u'' + u = 0$ $x^4 + 2x^2 + 1 = 0$ $(x^2 + 1)^2 = 0 \quad x = \pm i$ di molteplicità 2 ($\alpha = 0, \beta = 1$) Base : $e^{0t} \cos t, e^{0t} \sin t, t e^{0t} \cos t, t e^{0t} \sin t$	Equazione Polinomio
Sol. generale :	$u(t) = a \cos t + b \sin t + c t \cos t + d t \sin t$	
<u>Oss.</u>	In tutti i casi l'intervallo massimale di esistenza è tutto $\mathbb{R}$ (se i coeff. non hanno problemi, la solus. non ha problemi).	

Perché la base si trova in questo modo? Consideriamo un'eq. del tipo

$$au'' + bu' + cu = 0$$

Sembra ragionevole cercare una soluzione di tipo esponenziale

$$u(t) = e^{\lambda t}$$

Calcolo le sue derivate: $u'(t) = \lambda e^{\lambda t}$, $u''(t) = \lambda^2 e^{\lambda t}$ e sostituisco

$$au'' + bu' + cu = a\lambda^2 e^{\lambda t} + b\lambda e^{\lambda t} + ce^{\lambda t} = e^{\lambda t} (a\lambda^2 + b\lambda + c) = 0$$

$\neq 0$

L'unica speranza è che $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$, cioè che λ sia una radice del polinomio associato all'equazione.

Se $\Delta > 0$, ho 2 valori buoni per λ , quindi ho 2 sol. lin. indip., quindi ho trovato una base.

Oss. Se λ è un numero complesso $\alpha + i\beta$, si ha che

$$e^{\lambda t} = e^{\alpha t + i\beta t} = e^{\alpha t} \cdot e^{i\beta t} = e^{\alpha t} (\cos(\beta t) + i \sin(\beta t))$$

Oss. $u'' + u = 0 \rightsquigarrow x^2 + 1 = 0 \rightsquigarrow x = \pm i \rightsquigarrow u(t) = a \cos t + b \sin t$

$$u'' - u = 0 \rightsquigarrow x^2 - 1 = 0 \rightsquigarrow x = \pm 1 \rightsquigarrow u(t) = a e^t + b e^{-t}$$

Se e^t, e^{-t} è una base, allora anche $\frac{e^t + e^{-t}}{2}$ e $\frac{e^t - e^{-t}}{2}$ è una base, cioè anche $\cosh t$ e $\sinh t$ sono una base, quindi posso scrivere la soluzione come $u(t) = a \cosh t + b \sinh t$

— 0 — 0 —

EQUAZIONI NON OMOGENEE

$$\sum_{k=0}^n a_k(t) u^{(k)}(t) = f(t)$$

Fatto generale

Se u e v sono due soluzioni dell'eq. non omogenea, allora la differenza $u - v$ è soluzione dell'eq. omogenea associata, cioè della stessa equazione senza $f(t)$ a dx.

Dim. Pongo $w = u - v$. Allora per ogni $k \in \mathbb{N}$ si ha che $w^{(k)}(t) = u^{(k)}(t) - v^{(k)}(t)$ quindi

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} a_k(t) w^{(k)}(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k(t) (u^{(k)}(t) - v^{(k)}(t)) \\ &= \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} a_k(t) u^{(k)}(t)}_{f(t)} - \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} a_k(t) v^{(k)}(t)}_{f(t)} = f(t) - f(t) = 0 \end{aligned}$$

quindi w è soluzione dell'eq. omogenea.
— o — o —

Oss. Se u e v sono soluzioni della non omogenea, allora $w = u + v$ risolve la stessa equazione con $2f(t)$ a destra.

Se u è soluzione della non omogenea, allora $3u$ risolve con $3f(t)$..
— o — o —

Conseguenza: la soluzione generale di un'eq. diff. lin. non omogenea si scrive nella forma

$$u(t) = c_1 u_1(t) + \dots + c_n u_n(t) + \bar{u}(t) \quad \text{dove}$$

- $c_1, \dots, c_n$ sono le costanti arbitrarie
- $u_1(t), \dots, u_n(t)$ è una qualunque base dello spazio delle soluzioni dell'eq. omogenea
- $\bar{u}(t)$ è una soluzione qualunque dell'eq. non omogenea

Dim. Sia u sol. della non omogenea. Allora $u(t) - \bar{u}(t)$ è sol. dell'omog., quindi combinazione lineare degli elementi della base..

Operativamente Per trovare TUTTE le soluzioni di un'eq. NON omogenea basta trovare

- TUTTE le soluzioni dell'eq. omog. associata (cioè una base)
- UNA soluzione qualsiasi dell'eq. non omogenea.

Prossime puntate: come trovare $\bar{u}(t)$ o o o

ANALISI MATEMATICA 1 - LEZIONE 097

Titolo nota

07/12/2012

Eq. DIFF. LINEARI NON OMOGENEE

La soluzione generale di una eq. lin. non omogenea è data da

$$u(t) = \underbrace{c_1 u_1(t) + \dots + c_n u_n(t)}_{\text{sol. gen. eq. omogenea associata}} + \underbrace{\bar{u}(t)}_{\substack{\uparrow \text{soluzione qualunque eq.} \\ \text{NON omogenea}}}$$

Come trovare $\bar{u}(t)$. Due metodi

- 1 - Variatione delle costanti
- 2 - Provare ad indovinare

Il metodo 1 è un algoritmo sistematico, che funziona sempre, MA anche nei casi più semplici richiede molti calcoli.

Il metodo 2 non è sistematico, funziona solo in alcuni casi semplici, ma quando funziona è rapido.

Esempio 1 $u'' - 3u' - 4u = e^{2t}$

Esaminiamo l'eq. omogenea associata: $u'' - 3u' - 4u = 0$

$$\leadsto x^2 - 3x - 4 = 0 \leadsto (x-4)(x+1) = 0 \leadsto x=4 \text{ e } x=-1$$

$$\leadsto e^{4t}, e^{-t} \leadsto \text{Sol. gen. eq. omog. } ae^{4t} + be^{-t}$$

Cerco una soluzione qualunque dell'eq. NON omogenea.

È ragionevole cercarla della forma $u(t) = \lambda e^{2t}$. Calcolo $u'(t) = 2\lambda e^{2t}$, $u''(t) = 4\lambda e^{2t}$ e sostituisco nell'equazione:

$$4\lambda e^{2t} - 6\lambda e^{2t} - 4\lambda e^{2t} = e^{2t} \Rightarrow -6\lambda e^{2t} = e^{2t} \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{6}$$

Quindi $\bar{u}(t) = -\frac{1}{6}e^{2t}$ è una soluz. dell'eq. NON omogenea.

Sol. gen. NON omogenea: $u(t) = ae^{4t} + be^{-t} - \frac{1}{6}e^{2t}$

Esempio 2 $u'' - 3u' - 4u = e^{-7t}$ Parte omogenea come prima.

Cerco soluzione speciale del tipo $u(t) = \lambda e^{-7t}$. Calcolo $u'(t) = -7\lambda e^{-7t}$
 $u''(t) = 49\lambda e^{-7t}$. Sostituisco

$$49\lambda e^{-7t} + 21\lambda e^{-7t} - 4\lambda e^{-7t} = e^{-7t} \quad ; \quad 66\lambda e^{-7t} = e^{-7t} \Rightarrow \lambda = \frac{1}{66}$$

Sol. gen. eq. NON omogenea: $u(t) = \boxed{ae^{4t} + be^{-t}} + \boxed{\frac{1}{66}e^{-7t}}$
 sol. gen. eq. omogenea $\quad \quad \quad \uparrow$ sol. speciale $\bar{u}(t)$

Esempio 3 $u'' - 3u' - 4u = e^{4t}$ Cerco una soluzione del tipo $u(t) = \lambda e^{4t}$

Faccio i conti: $u'(t) = 4\lambda e^{4t}$, $u''(t) = 16\lambda e^{4t}$ e sostituisco

$$16\lambda e^{4t} - 12\lambda e^{4t} - 4\lambda e^{4t} = e^{4t} \quad \leadsto \quad 0 = e^{4t} \quad \leadsto \quad \text{non trovo } \lambda \dots$$

È andata male perché e^{4t} è tra le soluzioni dell'omogenea, quindi per definizione sostituendo a sx viene 0. Stessa cosa sarebbe successa con e^{-t} .

In questo caso il tentativo da fare è $u(t) = \lambda t e^{4t}$. Allora

$$u'(t) = \lambda e^{4t} + 4\lambda t e^{4t}, \quad u''(t) = 4\lambda e^{4t} + 4\lambda e^{4t} + 16\lambda t e^{4t}$$

$$\underbrace{8\lambda e^{4t} + 16\lambda t e^{4t}}_{u''} - \underbrace{3\lambda e^{4t} - 12\lambda t e^{4t}}_{-3u'} - \underbrace{4\lambda t e^{4t}}_{-4u} = e^{4t}$$

$$5\lambda e^{4t} = e^{4t} \Rightarrow \lambda = \frac{1}{5}$$

Bruttalmente: i termini con $2t$ se ne vanno perché sono prodotti dall'aver derivato l'esponenziale, lasciando la t intatta. Quindi sono 0. (quello che si ottiene sostituendo l'esponenziale) = $t \cdot 0 = 0$

I termini senza t non se ne vanno altrimenti $t e^{4t}$ sarebbe sol. dell'omg.

Sol. gen. eq. non omogenea: $u(t) = ae^{4t} + be^{-t} + \frac{1}{5}te^{4t}$

Regola generale: se il termine non omogeneo è del tipo $e^{\alpha t}$, allora il tentativo da fare è $u(t) = \lambda e^{\alpha t}$. Questo funziona se α non è radice del polinomio caratteristico.

Se α è radice del polinomio di molteplicità m , allora il tentativo da fare è $u(t) = \lambda t^m e^{\alpha t}$.

Oss. Questo vale per ogni possibile esponenziale: $2^t = e^{\log 2 \cdot t} \Rightarrow \alpha = \log 2$.

Esempio 4 $u'' - 3u' - 4u = \sin t$

Cerco una soluzione del tipo $u(t) = \lambda \sin t + \mu \cos t$. Faccio i calcoli!

$$u'(t) = \lambda \cos t - \mu \sin t, \quad u''(t) = -\lambda \sin t - \mu \cos t.$$

Sostituisco nell'equazione

$$\underbrace{-\lambda \sin t - \mu \cos t}_{u''} - 3 \underbrace{\lambda \cos t - \mu \sin t}_{u'} - 4 \underbrace{\lambda \sin t + \mu \cos t}_{u} = \sin t$$

$$\begin{cases} -\lambda + 3\mu - 4\lambda = 1 & (\text{coeff. } \sin t) \\ -\mu - 3\lambda - 4\mu = 0 & (\text{coeff. } \cos t) \end{cases} \quad \begin{cases} -5\lambda + 3\mu = 1 & -5 \\ -3\lambda - 5\mu = 0 & -3 \end{cases}$$

$$-25\lambda - 3\lambda = 5 \Rightarrow \lambda = -\frac{5}{34}$$

$$\mu = -\frac{3}{5}\lambda = +\frac{3}{34}$$

Sol. gen. eq. non omogenea: $u(t) = a e^{4t} + b e^{-t} - \frac{5}{34} \sin t + \frac{3}{34} \cos t$
 $\bar{u}(t)$: soluzione speciale

Regola generale: se il termine non omogeneo è del tipo $\sin(\alpha t)$ oppure $\cos(\alpha t)$, il tentativo da fare è $u(t) = \lambda \sin(\alpha t) + \mu \cos(\alpha t)$ (nel tentativo $\sin$ e $\cos$ compaiono sempre insieme). Questo funziona se $\sin(\alpha t)$ e $\cos(\alpha t)$ non sono soluzioni dell'eq. omogenea. Se lo sono, si moltiplica per t finché basta (dipende dalla molteplicità).

Esempio 5 $u'' + u = \sin t$ Omogenea: $u'' + u = 0 \leadsto x^2 + 1 = 0$
 $\leadsto x = \pm i \leadsto$ Base: $\sin t, \cos t$

Tentativo giusto: $u(t) = \lambda t \sin t + \mu t \cos t$

$$u'(t) = \lambda \sin t + \lambda t \cos t + \mu \cos t - \mu t \sin t$$

$$u''(t) = \lambda \cos t + \lambda \cos t - \lambda t \sin t - \mu \sin t - \mu \sin t - \mu t \cos t$$

Sostituendo nell'equazione:

$$\underbrace{2\lambda \cos t - \cancel{\lambda t \sin t} - 2\mu \sin t - \cancel{\mu t \cos t}}_{u''} + \underbrace{\cancel{\lambda t \sin t} + \cancel{\mu t \cos t}}_{+u} = \sin t$$

$$2\lambda \cos t - 2\mu \sin t = \sin t \quad \Rightarrow \quad \lambda = 0, \mu = -\frac{1}{2}$$

Sol. gen. eq. non omogenea: $u(t) = a \sin t + b \cos t - \frac{1}{2} t \cos t$

— o — o —

ANALISI MATEMATICA 1 - LEZIONE 098

Titolo nota

07/12/2012

Esempio 1 $u'' - 3u' - 4u = t^2$

Tentativo da fare: $u(t) = at^2 + bt + c$ ← polinomio completo dello stesso grado di quello assegnato

$$u'(t) = 2at + b, \quad u''(t) = 2a$$

Sostituisco nell'equazione:

$$\underbrace{2a}_{u''} - \underbrace{6at - 3b}_{-3u'} - \underbrace{4at^2 - 4bt - 4c}_{-4u} = t^2$$

$$-4a = 1 \quad (\text{coeff. } t^2)$$

$$a = -\frac{1}{4}$$

$$-6a - 4b = 0 \quad (\text{coeff. } t)$$

$$4b = -6a \Rightarrow b = -\frac{3}{2}a = \frac{3}{8}$$

$$2a - 3b - 4c = 0 \quad (\text{termine noto})$$

$$4c = 2a - 3b \Rightarrow c = \frac{1}{2}a - \frac{3}{4}b = -\frac{1}{8} - \frac{9}{32} = -\frac{13}{32}$$

Sol. gen. eq. NON omogenea: $u(t) = ae^{4t} + be^{-t} - \frac{1}{4}t^2 + \frac{3}{8}t - \frac{13}{32}$

Regola generale: se il termine non omogeneo è un polinomio, allora il tentativo è un polinomio completo dello stesso grado a coeff. incogniti. Funziona quando non ci sono polinomi tra le soluzioni dell'omogenea, cioè quando $x=0$ non è radice del polinomio caratteristico dell'eq. omogenea. Se $x=0$ è radice del pol. caratt. di molteplicità m , allora bisogna moltiplicare il tentativo per t^m .

Esempio 2 $u^{IV} + 9u'' = t^3 - 3$

Omogenea associata: $u^{IV} + 9u'' = 0 \rightsquigarrow x^4 + 9x^2 = 0 \rightsquigarrow x^2(x^2 + 9) = 0$

→ Radici: $x=0$ con molteplicità 2, $x = \pm 3i$

→ Base: $\sin(3t), \cos(3t), 1, t$
 $e^{0t} \quad t e^{0t}$

Il tentativo $u(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$ fallisce perché ci sono polinomi (1 e t) tra le soluzioni dell'omogenea.

Essendo 2 la molteplicità della radice $\lambda = 0$, devo moltiplicare il tentativo per t^2 :

$$u(t) = at^5 + bt^4 + ct^3 + dt^2 \quad (\text{è inutile aggiungere } +et+f)$$

Svolgo i conti:

$$u'(t) = 5at^4 + 4bt^3 + 3ct^2 + 2dt$$

$$u''(t) = 20at^3 + 12bt^2 + 6ct + 2d$$

$$u'''(t) = 60at^2 + 24bt + 6c$$

$$u^{(4)}(t) = 120at + 24b$$

Sostituisco nell'equazione:

$$\underbrace{120at + 24b}_{u^{(4)}} + \underbrace{180at^3 + 108bt^2 + 54ct + 18d}_{+9u''} = t^3 - 3$$

$$180a = 1$$

(coeff. t^3)

$$a = \frac{1}{180}$$

$$108b = 0$$

(coeff. t^2)

$$b = 0$$

$$120a + 54c = 0$$

(coeff. t)

$$c = -\frac{120}{54}a = -\frac{120}{54} \cdot \frac{1}{180} = -\frac{1}{81}$$

$$24b + 18d = -3$$

(termine noto)

$$d = -\frac{1}{6}$$

Sol. gen. eq. non omogenea:

$$u(t) = a \sin(3t) + b \cos(3t) + c + dt + \frac{1}{180}t^5 - \frac{1}{81}t^3 - \frac{1}{6}t^2$$

sol. gen. eq. omogenea (comb. lineari elem. base)

soluzione speciale dell'eq. non omogenea trovata con il tentativo

Oss. Se a dx c'è un po' di tutto (polinomi, esponenziali, funz. trigo.) è un misto dei tentativi per i singoli pezzi.

Anzi si può (GRAZIE ALLA LINEARITÀ).

→ risolvere separatamente con i singoli pezzi

→ sommare le soluzioni così ottenute.

(Se u risolve con f e v risolve con g , allora $u+v$ risolve con $f+g$)

METODO DI VARIAZIONE DELLE COSTANTI

Esempio Risolvere $u'' - 3u' - 4u = t$

Con il tentativo $u(t) = at + b$, $u'(t) = a$, $u''(t) = 0$. Sostituisco

$$0 - 3a - 4at - 4b = t \quad \begin{cases} -4a = 1 & a = -\frac{1}{4} \\ -3a - 4b = 0 & b = -\frac{3}{4}a = \frac{3}{16} \end{cases}$$

Quindi sol. gen. NON omog: $u(t) = ae^{4t} + be^{-t} - \frac{1}{4}t + \frac{3}{16}$.

Metodo alternativo: la soluzione generale dell'omog. è $u(t) = ae^{4t} + be^{-t}$
Cerco la soluzione speciale della non omogenea facendo "variazione delle costanti".

$$u(t) = a(t)e^{4t} + b(t)e^{-t}$$

Calcolo

$$u'(t) = a'(t)e^{4t} + 4a(t)e^{4t} + b'(t)e^{-t} - b(t)e^{-t}$$

Impongo che la somma dei termini con le derivate faccia 0

$$a'(t)e^{4t} + b'(t)e^{-t} = 0 \quad \text{1ª equazione}$$

A questo punto $u'(t) = 4a(t)e^{4t} - b(t)e^{-t}$. Da qui calcolo $u''(t)$:

$$u''(t) = 4a'(t)e^{4t} + 16a(t)e^{4t} - b'(t)e^{-t} + b(t)e^{-t}$$

Sostituisco $u''(t)$, $u'(t)$ e $u(t)$ nell'equazione

$$\begin{array}{lcl} 4a'(t)e^{4t} + 16a(t)e^{4t} - b'(t)e^{-t} + b(t)e^{-t} & & u''(t) \\ -12a(t)e^{4t} + 3b(t)e^{-t} & & -3u'(t) \\ -4a(t)e^{4t} - 4b(t)e^{-t} & = & -4u(t) = t \end{array}$$

Dove succedere che i termini senza derivate se ne vanno

Resta

$$4a'(t)e^{4t} - b'(t)e^{-t} = t \quad 2^{\text{a}} \text{ equazione}$$

La 1^a e 2^a equazione sono un sistema in $a'(t)$ e $b'(t)$. Risolvendo il sistema trovo $a'(t)$ e $b'(t)$, poi integrando troverò $a(t)$ e $b(t)$.

$$\begin{cases} a'(t)e^{4t} + b'(t)e^{-t} = 0 \\ 4a'(t)e^{4t} - b'(t)e^{-t} = t \end{cases} \quad \text{Sommo: } 5a'(t)e^{4t} = t. \text{ Da cui}$$

$$b'(t)e^{-t} = -a'(t)e^{4t} = -\frac{t}{5}$$

Pertanto $a'(t) = \frac{1}{5}te^{-4t} \quad b'(t) = -\frac{1}{5}te^{+t}$

Non resta che trovare $a(t)$ e $b(t)$:

$$a(t) = \frac{1}{5} \int te^{-4t} dt = \frac{1}{5} \left(t \cdot \left(-\frac{1}{4}e^{-4t}\right) + \int \frac{1}{4}e^{-4t} dt \right)$$

F g

$$= -\frac{4}{5}te^{-4t} - \frac{1}{80}e^{-4t} \quad \left[= -\frac{1}{20}te^{-4t} - \frac{1}{80}e^{-4t} \right]$$

corretto dopo video

$$b(t) = -\frac{1}{5} \int te^{+t} dt = -\frac{1}{5} \left(+te^{+t} - \int e^{+t} dt \right) = -\frac{1}{5}te^{+t} + \frac{1}{5}e^{+t}$$

Quindi la soluzione speciale è:

$$u(t) = a(t)e^{4t} + b(t)e^{-t} = -\frac{4}{5}t - \frac{1}{80} - \frac{1}{5}t + \frac{1}{5}$$

$$= -t + \dots \quad \text{c'è un conto sbagliato...}$$

$$\left[= -\frac{1}{20}t - \frac{1}{80} - \frac{1}{5}t + \frac{1}{5} \right]$$

$$= -\frac{1}{4}t + \frac{15}{80} = -\frac{1}{4}t + \frac{3}{16} \quad \text{😊}$$

Aggiunto dopo video

ANALISI MATEMATICA 1 - LEZIONE 099

Titolo nota

07/12/2012

EQUAZIONI 1° ORDINE LINEARI

$$u' + a(t)u = b(t)$$

Due metodi risolutivi: → Fattore integrante
→ Omogenea + tentativo

FATTORE INTEGRANTE

Considero una primitiva di $a(t)$, cioè $A'(t) = a(t)$
Moltiplico a dx e sx per $e^{A(t)}$ ← *fattore integrante*

$$u'(t) e^{A(t)} + a(t) u(t) e^{A(t)} = b(t) e^{A(t)}$$

$$[u(t) e^{A(t)}]' = b(t) e^{A(t)}$$

Ora posso integrare a destra e ottenere $u(t) e^{A(t)}$, da cui si ricava immediatamente $u(t)$

$$u(t) e^{A(t)} = \int b(s) e^{A(s)} ds + c$$

da cui

$$u(t) = c e^{-A(t)} + e^{-A(t)} \int b(s) e^{A(s)} ds$$

Formula
risolutivaEsempio 1

$$u' + \underbrace{2t}_{a(t)} u = \underbrace{t^3}_{b(t)}$$

$$A(t) = t^2$$

Fattore integrante: $e^{A(t)} = e^{t^2}$. Moltiplico a dx e sx per il fattore int.

$$u' e^{t^2} + 2t u \cdot e^{t^2} = t^3 e^{t^2}$$

$$[u \cdot e^{t^2}]' = t^3 e^{t^2}$$

$$\text{Quindi } u \cdot e^{t^2} = \int t^3 e^{t^2} dt = \int \underset{F}{t^2} \cdot \underset{g}{t} e^{t^2} dt$$

$$= \underset{F}{t^2} \cdot \underset{G}{\frac{1}{2} e^{t^2}} - \int \underset{f}{2t} \cdot \underset{G}{\frac{1}{2} e^{t^2}} dt$$

$$= \frac{1}{2} t^2 e^{t^2} - \int t e^{t^2} dt = \frac{1}{2} t^2 e^{t^2} - \frac{1}{2} e^{t^2}$$

In conclusione: $u(t) \cdot e^{t^2} = \frac{1}{2} t^2 e^{t^2} - \frac{1}{2} e^{t^2} + c$, da cui si ricava

$$u(t) = c \cdot e^{-t^2} + \frac{1}{2} t^2 - \frac{1}{2} \quad \text{Soluzione generale.}$$

Oss. Il metodo del fattore integrante funziona a patto di saper fare 2 primitive:

→ la primitiva di $a(t)$ per trovare $A(t)$

→ la primitiva di $b(t) e^{A(t)}$.

METODO: OMOGENEA + TENTATIVO

Per la teoria generale delle equazioni lineari, la soluzione sarà del tipo

$$u(t) = \underbrace{c \cdot u_1(t)}_{\text{sol. eq. omog.}} + \underbrace{\bar{u}(t)}_{\text{sol. speciale eq. non omog.}}$$

Qual è l'equazione omogenea associata? $u' + a(t)u = b(t)$

$$\leadsto u' + a(t)u = 0$$

Questa si può vedere come equazione a variabili separabili

$$u' = -a(t)u$$

① Separare: $\frac{du}{dt} = -a(t)u \leadsto \frac{du}{u} = -a(t)dt$

② Integrare: $\int \frac{du}{u} = -\int a(t)dt$; $\log|u| = -A(t) + c$

③ Ricavare: $\log|u(t)| = -A(t) + c \leadsto |u(t)| = e^{-A(t)+c}$
 $\leadsto u(t) = \pm e^{-A(t)+c}$

Ora

$$u(t) = \pm e^{-A(t)+c} = \boxed{\pm e^c} \cdot e^{-A(t)} = c \cdot e^{-A(t)}$$

↑ costante qualunque
positiva o negativa

Conclusione: la soluzione generale dell'eq. omogenea associata è

$$u(t) = c e^{-A(t)}$$

N.B. È il primo pezzo della formula ottenuta con il fattore integrante.

Mi serve una soluzione speciale $\tilde{u}(t)$ dell'eq. non omogenea. Posso farlo con il tentativo o con la variazione delle costanti, cioè cercando del tipo

$$u(t) = c(t) e^{-A(t)}$$

Devo calcolare solo $u'(t) = c'(t) e^{-A(t)} + c(t) \cdot e^{-A(t)} (-a(t))$

Sostituisco $u(t)$ e $u'(t)$ nell'equazione NON omog: $u' + a(t)u = b(t)$

$$\underbrace{c'(t) e^{-A(t)} - c(t) e^{-A(t)} a(t)}_{u'} + \underbrace{a(t) c(t) e^{-A(t)}}_{+a(t)u} = b(t)$$

Otengo quindi $c'(t) e^{-A(t)} = b(t)$, da cui $c'(t) = b(t) e^{A(t)}$, quindi

$$c(t) = \int b(t) e^{A(t)} dt, \text{ da cui } u(t) = e^{-A(t)} \int b(t) e^{A(t)} dt$$

soluzione speciale dell'eq. non omogenea, che coincide con il secondo pezzo della formula ottenuta mediante fattore integrante.

Tornando all'esempio: $u' + 2tu = t^3$, l'eq. omogenea associata è

$$u' + 2tu = 0 \rightsquigarrow u' = -2tu \rightsquigarrow \frac{du}{dt} = -2tu \rightsquigarrow \frac{du}{u} = -2t dt$$

$$\leadsto \int \frac{du}{u} = \int -2t dt \leadsto \log |u| = -t^2 + c \leadsto |u| = e^{-t^2+c}$$

$$\leadsto u(t) = \pm e^{-t^2+c} = ce^{-t^2} \leadsto \text{parte sol. gen. eq. omog.}$$

Per trovare una soluzione speciale si può fare un tentativo con un polinomio. Di che grado? Sembra ragionevole il grado 2

$$u(t) = at^2 + bt + c$$

$$u'(t) = 2at + b$$

Sostituisco:

$$\underbrace{2at+b}_u + \underbrace{2at^3+2bt^2+2ct}_{+2tu} = t^3$$

$$2a = 1 \quad (\text{coeff. } t^3)$$

$$2b = 0 \quad (\text{coeff. } t^2)$$

$$2a+2c = 0 \quad (\text{coeff. } t)$$

$$b = 0 \quad (\text{termine noto})$$

$$a = \frac{1}{2}, b = 0, c = -a = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \text{Soluzione speciale: } u(t) = \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2} \Rightarrow \text{sol. gen.} = c \cdot e^{-t^2} + \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}$$

concluso dopo video

Oss. È andata bene nel risolvere il sistema lineare che aveva + equazioni che incognite. È andata bene perché t^3 era una potenza dispari. Per lo stesso motivo è andata bene la primitiva di $t^3 e^{t^2}$. In generale la primitiva di $t^{2k+1} e^{t^2}$ si riesce ad esprimere con le funzioni elementari

$$t^{2k+1} \cdot e^{t^2} = t^{2k} \cdot e^{t^2} \cdot t \leadsto y = t^2$$

Oss. Se nelle eq. a coeff. costanti c'è a dx polinomio. e e^{dx} oppure polinomio. sia (dx) , il tentativo ragionevole da fare è dello stesso tipo (in certi casi occorre poi aggiungere delle $t \dots$)

ANALISI MATEMATICA 1 - LEZIONE 100

Titolo nota

12/12/2012

NUMERI COMPLESSICome si presentano: $\mathbb{C}$ = insieme dei numeri complessi

- Forma cartesiana
- Forma trigonometrica
- Forma esponenziale

Forma cartesiana

$$z \in \mathbb{C} \quad z = a + bi \quad i^2 = -1$$

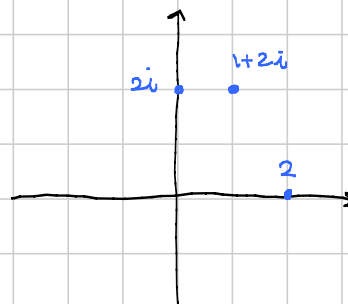
 a e b sono numeri reali

$$a = \operatorname{Re}(z) = \text{parte reale di } z$$

$$b = \operatorname{Im}(z) = \text{parte immaginaria di } z$$

 $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ nel senso che i numeri reali sono particolari numeri complessi, quelli con parte immaginaria $= 0$.

Un numero complesso $z = a + bi$ si può identificare con il punto (a, b) del piano, che in questo caso si chiama **piano di Gauss**.



I numeri reali corrispondono "all'asse x " del piano reale, i numeri immaginari puri (cioè quelli con parte reale $= 0$) corrispondono all'asse y .

Operazioni algebriche $z = a + bi$ $w = c + di$. Allora

$$z + w = (a + c) + (b + d)i$$

$$z - w = (a - c) + (b - d)i$$

$$z \cdot w = (a + bi)(c + di) = ac + adi + bc i + bd \overset{-1}{\boxed{i^2}} = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

$$\frac{1}{w} = \frac{1}{c + di} = \frac{1}{c + di} \cdot \frac{c - di}{c - di} = \frac{c - di}{c^2 + d^2}$$

$$\begin{aligned} & c^2 - (di)^2 \\ &= c^2 - d^2 i^2 = c^2 + d^2 \end{aligned}$$

Questo ha senso se $c^2 + d^2 \neq 0$,
cioè se $w \neq 0$.

Dato il reciproco, il rapporto di numeri complessi è fatto:

$$\frac{z}{w} = z \cdot \frac{1}{w} = (a+bi) \cdot \frac{c-di}{c^2+d^2} = \frac{ac - adi + bci - \overbrace{bd}^{-1} i^2}{c^2+d^2}$$

$$= \frac{(ac+bd)}{c^2+d^2} + \frac{-ad+bc}{c^2+d^2} i$$

Def. Si dice coniugato di $z = a+bi$ il numero complesso $\bar{z} = a-bi$.

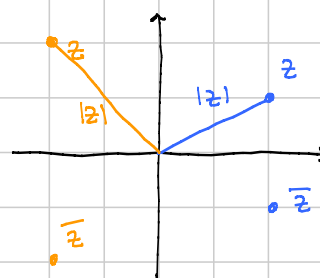
Si dice modulo di $z = a+bi$ il numero reale non negativo

$$|z| = \sqrt{a^2+b^2} \quad (\text{reale e } \geq 0)$$

Nel piano di Gauss:

→ $\bar{z}$ è il simmetrico di z rispetto all'asse reale.

→ $|z|$ è la distanza di z dall'origine.



Osservazioni ovvie

$$|z| = |\bar{z}|$$

$$|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$$

Proprietà facili del coniugato

(1) il coniugato del coniugato è il numero stesso: $\overline{(\bar{z})} = z$

(2) il coniugato commuta con le operazioni algebriche:

$$\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}, \quad \overline{z-w} = \bar{z} - \bar{w}, \quad \overline{zw} = \bar{z} \cdot \bar{w}, \quad \overline{\left(\frac{1}{w}\right)} = \frac{1}{\bar{w}}$$

[Verifiche per esercizio: Facciamolo per il prodotto.

Siano $z = a+bi$, $w = c+di$. Allora

$$\overline{zw} = \overline{(a+bi)(c+di)} = \overline{ac+adi+bci-bd} = (ac-bd) - (ad+bc)i$$

$$\bar{z} \cdot \bar{w} = (a-bi) \cdot (c-di) = ac - adi - bci - bd = (ac-bd) - (ad+bc)i. \quad]$$

Relazione tra coniugato, modulo, reciproco

$$z = a+bi \quad \bar{z} = a-bi \quad z \cdot \bar{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2+b^2 = |z|^2$$

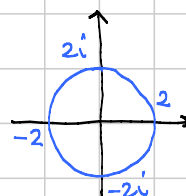
$$z \cdot \bar{z} = |z|^2$$

da cui

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

se $z \neq 0$

Esercizio Come sono fatti nel piano di Gauss tutti gli $z \in \mathbb{C}$ t.c. $|z| = 2$?



Trovare tutti i numeri $z \in \mathbb{C}$ t.c. $|z| = 3$ e $\operatorname{Re}(z) = 2$

Tradotto nel piano cartesiano, si tratta di risolvere

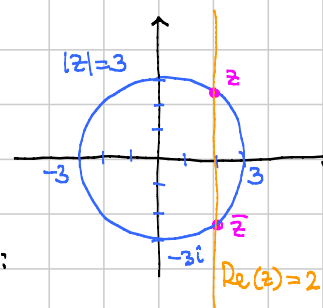
$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 9 \\ a = 2 \end{cases} \quad \begin{matrix} |z| = 3, |z|^2 = 9 \\ \operatorname{Re}(z) = 2 \end{matrix}$$

$b^2 = 5 \Rightarrow b = \pm\sqrt{5}$. Quindi ci sono 2 soluzioni:

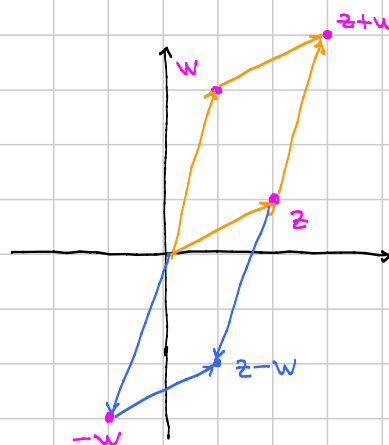
$$2 + \sqrt{5}i$$

$$2 - \sqrt{5}i$$

— o — o —

Somma e differenza nel piano di Gauss

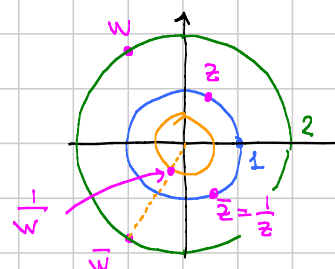
- La somma diventa quella che in fisica si chiama regola del parallelogrammo
- La differenza vuol dire sommare $-w$, e $-w$ è il simmetrico rispetto all'origine di w .



- Il reciproco si interpreta attraverso la formula $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$.

Caso particolare: se $|z| = 1$, allora $\frac{1}{z} = \bar{z}$

Se $|z| \neq 1$, allora comunque $\frac{1}{z}$ ha la stessa direzione e verso di $\bar{z}$, ma modulo diverso.



Proprietà del modulo Se $z \in \mathbb{C}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, allora $|\lambda z| = |\lambda| \cdot |z|$

Più in generale, se $z \in \mathbb{C}$ e $w \in \mathbb{C}$, allora

$$|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$$

Inoltre se $z \neq 0$

$$\left| \frac{1}{z} \right| = \frac{1}{|z|}$$

Verifica della seconda

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{1}{|z|^2} \cdot \bar{z}, \text{ quindi}$$

$$\left| \frac{1}{z} \right| = \frac{1}{|z|^2} \cdot |\bar{z}| = \frac{1}{|z|^2} \cdot |z| = \frac{1}{|z|}$$

Verifica della prima

$$z = a+bi \quad w = c+di$$

$$\begin{aligned} |z \cdot w|^2 &= |(a+bi) \cdot (c+di)|^2 = |(ac-bd) + (ad+bc)i|^2 \\ &= (ac-bd)^2 + (ad+bc)^2 \\ &= a^2c^2 - 2abcd + b^2d^2 + a^2d^2 + 2abcd + b^2c^2 \\ &= a^2c^2 + b^2d^2 + a^2d^2 + b^2c^2 \end{aligned}$$

$$|z|^2 \cdot |w|^2 = (a^2+b^2)(c^2+d^2) = a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2$$

Oss. Verifica più furba della prima:

$$|z \cdot w|^2 = \overset{\substack{\uparrow \\ \text{Modulo}^2 = \text{numero} \\ \text{conjugato}}}{z \cdot w} \cdot \overline{z \cdot w} = \overset{\substack{\uparrow \\ \text{conjug. prod.} \\ = \text{prod. conjug.}}}{z \cdot w \cdot \bar{z} \cdot \bar{w}} = \overset{\substack{\uparrow \\ \text{commutativa}}}{z \cdot \bar{z} \cdot w \cdot \bar{w}} = \overset{\substack{\uparrow \\ \text{come 1° passaggio}}}{|z|^2 \cdot |w|^2}$$

ANALISI MATEMATICA 1 - LEZIONE 101

Titolo nota

12/12/2012

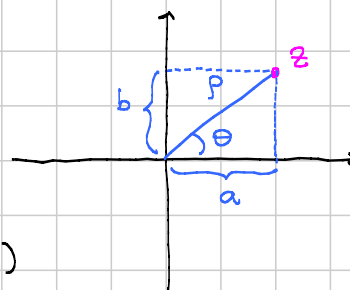
Numeri complessi: forma trigonometrica

$$z = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$$

dove

→ ρ è la distanza di z dall'origine ($\rho = |z|$)→ θ è quello che si chiama argomento di z , cioè l'angolo che la retta passante per 0 e z forma con il semiasse reale positivo

Quindi

 $\rho \geq 0$ reale θ è un angolo

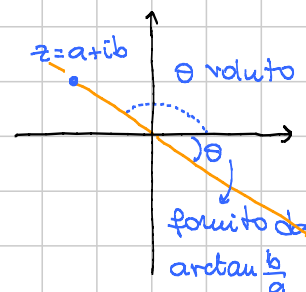
Formule di passaggio

$$a = \rho \cos \theta$$

$$b = \rho \sin \theta$$

conosco ρ e θ
voglio a e b Viceversa, se conosco a e b , allora $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$, mentre per θ è meglio guardare il disegno.Achtung! $\frac{b}{a} = \frac{\rho \sin \theta}{\rho \cos \theta} = \tan \theta$, da cui apparentemente

$$\theta = \arctan \frac{b}{a}$$

Questa va bene solo nel 1° e nel 4° quadrante, oltre alla restrizione $a \neq 0$.Nel secondo e nel terzo quadrante, il risultato è sbagliato di π (bisogna aggiungere π).Infatti $\frac{b}{a}$ = coeff. angolare della retta passante per 0 e z .Se faccio $\arctan \frac{b}{a}$ ottengo l'angolo θ nel 4° quadrante, che differisce di π da quello che vorrei.Oss. z e $\bar{z}$ hanno stesso ρ , e θ "scambiati di segno"

Prodotto di complessi in forma trigonometrica

$$z = \rho(\cos \theta + i \sin \theta) \quad w = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

$$\begin{aligned} z \cdot w &= \rho r [(\cos \theta \cos \varphi - \sin \theta \sin \varphi) + i(\cos \theta \sin \varphi + \sin \theta \cos \varphi)] \\ &= \rho r [\cos(\theta + \varphi) + i \sin(\theta + \varphi)] \end{aligned}$$

Quindi in forma trigonometrica, fare il prodotto vuol dire

→ moltiplicare i moduli

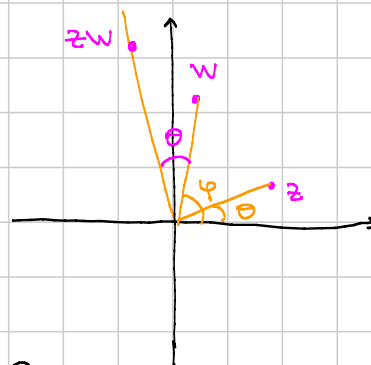
→ sommare gli argomenti

Analogamente, fare la divisione vuol dire

→ dividere i moduli

→ sottrarre gli argomenti

$$\frac{z}{w} = \frac{\rho}{r} [\cos(\theta - \varphi) + i \sin(\theta - \varphi)]$$



Forma esponenziale $z = \rho e^{i\theta}$

È semplicemente un altro modo di scrivere ρ e θ .

Vantaggio: operando brutalmente con l'esponenziale si ottiene la regola per il prodotto

$$z = \rho e^{i\theta}, \quad w = r e^{i\varphi} \quad z \cdot w = \rho e^{i\theta} \cdot r e^{i\varphi} = \rho r \cdot e^{i\theta} \cdot e^{i\varphi} = \rho r e^{i(\theta + \varphi)}$$

somma argomenti
↑
 $i(\theta + \varphi)$
prodotto moduli

Potenza n-esima di un numero complesso

$$z = a + bi \quad z^n = (a + bi)^n = \text{sviluppare con il binomio di Newton...}$$

$$z = \rho e^{i\theta} \quad z^n = (\rho e^{i\theta})^n = \rho^n e^{in\theta}$$

Volendo scrivere la formula in forma trigonometrica:

$$[p(\cos \theta + i \sin \theta)]^n = p^n (\cos(n\theta) + i \sin(n\theta))$$

Esercizio: dimostrare rigorosamente per induzione,

Esempio 1 Dalla formula di sopra si "ricavano" varie formule trigonometriche. Poniamo che sia $p=1$.

$$\begin{aligned} \text{Pongo } n=2 \quad (\cos \theta + i \sin \theta)^2 &= \cos(2\theta) + i \sin(2\theta) \\ &= \cos^2 \theta - \sin^2 \theta + 2i \cos \theta \sin \theta \end{aligned}$$

Uguagliando parte reale e immaginaria si ottiene

$$\cos(2\theta) = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \quad \sin(2\theta) = 2 \cos \theta \sin \theta$$

$$\begin{aligned} \text{Pongo } n=3 \quad (\cos \theta + i \sin \theta)^3 &= \cos(3\theta) + i \sin(3\theta) \\ &= \cos^3 \theta + 3 \cos^2 \theta \cdot i \sin \theta + 3 \cos \theta \cdot i^2 \sin^2 \theta + i^3 \sin^3 \theta \\ &= \cos^3 \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta + i(3 \cos^2 \theta \sin \theta - \sin^3 \theta) \end{aligned}$$

Uguagliando parte reale e parte immaginaria:

$$\cos(3\theta) = \cos^3 \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta$$

$$\sin(3\theta) = 3 \cos^2 \theta \sin \theta - \sin^3 \theta$$

Oss. Possono essere utili per integrare $\cos^3 \theta$ oppure $\sin^3 \theta$

$$\text{Esempio 2} \quad i^3 = i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -i$$

In alternativa i ha $p=1$ e $\theta = \frac{\pi}{2}$, quindi

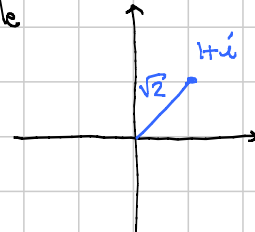
$$i^3 \text{ ha } p=1^3=1 \text{ e } \theta = \frac{3\pi}{2}$$

Esempio 3 Calcolare $(1+i)^{2012}$

1° modo: binomio di Newton (auguri!)

2° modo: passo dalla forma trigonometrica/esponenziale

$$z = (1+i) = \underbrace{\sqrt{2}}_p e^{i \frac{\pi}{4}}$$



Quando elevo alla potenza 2012 ottengo

$$z^{2012} = (\sqrt{2})^{2012} e^{\frac{\pi}{4} i \cdot 2012} = (\sqrt{2})^{2012} \cdot e^{i \cdot 503\pi} = 2^{1006} e^{i 503\pi}$$

Ora torno in forma cartesiana $e^{i 503\pi} = e^{i\pi} = -1$

$$\text{Quindi } (1+i)^{2012} = -2^{1006}$$

$$\text{Analogamente } (1+i)^{-2012} = \frac{1}{(1+i)^{2012}} = -\frac{1}{2^{1006}}$$

ANALISI MATEMATICA 1 - LEZIONE 102

Titolo nota

13/12/2012

Forma cartesiana: $a+bi \rightsquigarrow$ comoda per questioni additiveForma trigonometrica: $\rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ Forma esponenziale: $\rho e^{i\theta}$ $\} \rightsquigarrow$ comode per questioni moltiplicative

Potenza n-esima $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) \Rightarrow z^n = \rho^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta))$

$$z = \rho e^{i\theta} \Rightarrow z^n = (\rho e^{i\theta})^n = \rho^n e^{in\theta}$$

Esempio 1 $(i - \sqrt{3})^{22}$ $\rightsquigarrow$ scriverlo in forma cartesiana

Passiamo attraverso la forma esponenziale, $z = i - \sqrt{3} = -\sqrt{3} + i$

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{3+1} = 2$$

$$z = 2 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i \cdot \frac{1}{2} \right) = 2 \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right)$$

$$= 2 e^{\frac{5\pi}{6}i}$$

$$z^{22} = 2^{22} e^{\frac{5\pi}{6}i \cdot 22} = 2^{22} e^{\frac{55\pi}{3}i} = 2^{22} e^{(18\pi + \frac{\pi}{3})i} = 2^{22} e^{\frac{\pi}{3}i}$$

$55 = 54 + 1 = 3 \cdot 18 + 1$

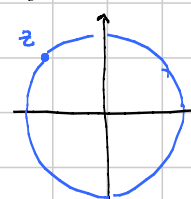
$$= 2^{22} \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$$

$$= 2^{22} \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \right) = 2^{21} + 2^{21} \sqrt{3} i \rightsquigarrow \text{risposta in forma cartesiana}$$

Esempio 2 $(1-i)^{-7} = \left(\frac{1}{1-i} \right)^7 = \frac{1}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i} = \frac{1+i}{2} = \frac{1}{2}(1+i)$

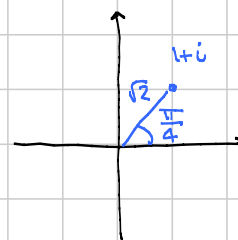
$$= \frac{1}{2} \sqrt{2} e^{\frac{\pi}{4}i} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{\frac{\pi}{4}i} \text{ . Eleva alla settima}$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^7 e^{\frac{7\pi}{4}i} = \frac{1}{8\sqrt{2}} \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right) = \frac{1}{8\sqrt{2}} \frac{\sqrt{2}}{2} (1-i)$$



risposta in forma esponenziale

$$2^{22} e^{\frac{\pi}{3}i}$$



Radici n -esime di un numero complesso

Sia a un numero complesso. Trovare LE radici n -esime di a vuol dire trovare TUTTI i numeri complessi $z \in \mathbb{C}$ tali che $z^n = a$.

Questo problema ha

- unica soluzione $z=0$ se $a=0$
- se $a \neq 0$ ci sono esattamente n soluzioni che rappresentate nel piano di Gauss sono i vertici di un poligono regolare di n lati con il centro nell'origine.

Dim. Scrivo a e z in forma esponenziale: $a = r e^{i\varphi}$ DATO
 $z = p e^{i\theta}$ DA TROVARE

Impongo $z^n = a$, cioè

$p^n e^{in\theta} = r e^{i\varphi}$ Ora due numeri complessi scritti in forma esponenziale sono uguali se e solo se hanno lo stesso modulo e argo, menti che differiscono per multipli interi di 2π . Quindi

$$p^n = r$$

$$n\theta = \varphi + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$p = \sqrt[n]{r}$$

$$\theta = \frac{\varphi}{n} + \frac{2k}{n}\pi$$

si intende l'unica radice n -esima REALE ≥ 0

Dando a k i valori $0, 1, 2, \dots, n-1$ ottengo n soluzioni che sono distinte se $p \neq 0$. Queste soluzioni hanno gli argomenti sfasati di $\frac{2\pi}{n}$, il che produce il poligono regolare.

Se a k sostituisco valori successivi o precedenti riottengo le stesse soluzioni. Ad esempio:

$$k = n \rightsquigarrow \theta = \frac{\varphi}{n} + 2\pi \rightsquigarrow \text{stessa cosa di } k=0$$

$$k = n+1 \rightsquigarrow \theta = \frac{\varphi}{n} + \frac{2n+2}{n}\pi = \frac{\varphi}{n} + \boxed{2\pi} + \frac{2\pi}{n} \rightsquigarrow \text{stessa cosa di } k=1$$

↑
inutile

Quindi le n radici n -esime di a stanno tutte sulla stessa circonferenza di raggio p e centro in 0 , e argomenti sfasati di $\frac{2\pi}{n}$.

— o — o —

Achtung! Non confondere mai:

→ LA radice n -esima di un numero reale ≥ 0 (è unica ed è definita come l'inverso della funzione x^n che è bigettiva...)

→ LE radici n -esime in ambito complesso, che sono TUTTE le soluzioni...

Esempio $\sqrt{4}$ si intende la radice sui reali, quindi $\sqrt{4} = 2$

Il numero complesso $a = 4$ ha 2 radici quadrate: $z = 2$ e $z = -2$

Esempio 1 Scrivere in forma cartesiana le 3 radici cubiche complesse di $8i$.
Devo risolvere $z^3 = 8i$

Passo dalla forma esponenziale: $8i = 8e^{\frac{\pi}{2}i}$ $z = \rho e^{i\theta}$

$$z^3 = \rho^3 e^{i3\theta} = 8e^{\frac{\pi}{2}i} \quad \text{da cui} \quad \begin{cases} \rho^3 = 8 \\ 3\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases}$$

$$\rho = \sqrt[3]{8} = 2 \quad (\text{radice cubica reale})$$

$$\theta = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \cdot \frac{1}{3} \quad k \in \mathbb{Z}$$

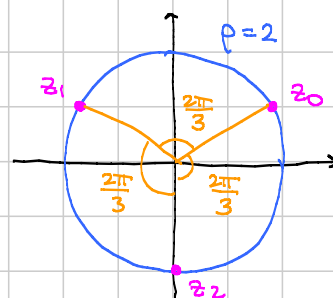
$$k=0 \leadsto \theta_0 = \frac{\pi}{6} \quad k=1 \leadsto \theta_1 = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} = \frac{5\pi}{6}$$

$$k=2 \leadsto \theta_2 = \frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3} = \frac{9\pi}{6} = \frac{3\pi}{2}. \quad \text{Le 3 soluzioni sono}$$

$$z_0 = 2e^{\frac{\pi}{6}i} = 2\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} + i$$

$$z_1 = 2e^{\frac{5\pi}{6}i} = 2\left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6}\right) = -\sqrt{3} + i$$

$$z_2 = 2e^{\frac{3\pi}{2}i} = 2\left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2}\right) = -2i$$



Modo alternativo: $a = 8i \Rightarrow |a| = 8 \Rightarrow |z| = 2$

Argomento di $a = \frac{\pi}{2} \Rightarrow$ la prima radice avrà argomento $\frac{1}{3} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6}$

Le altre 2 radici saranno sfasate di $\frac{2\pi}{3}$.

Esempio 2 Calcolare le radici sesse di $-i = a$ (risolvere $z^6 = -i$)

$$|a| = 1 \Rightarrow |z| = 1$$

Argomento di $a = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow$ una radice avrà
argomento

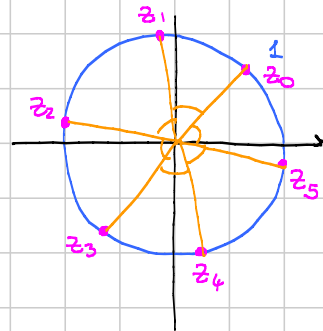
$$\frac{1}{6} \cdot \frac{3\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$$

La prima radice è $z_0 = 1 \cdot e^{\frac{\pi}{4}i} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$.

Le altre 5 saranno sfasate di $\frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$. Quindi

$$\theta_0 = \frac{\pi}{4}, \quad \theta_1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} = \frac{7\pi}{12}, \quad \theta_2 = \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3} = \frac{11\pi}{12}$$

$$\theta_3 = \frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5\pi}{4}, \quad \theta_4 = \frac{\pi}{4} + \frac{4\pi}{3} = \frac{19\pi}{12}, \quad \theta_5 = \frac{\pi}{4} + \frac{5\pi}{3} = \frac{23\pi}{12}$$



ANALISI MATEMATICA 1 - LEZIONE 103

Titolo nota

13/12/2012

Polinomi a coeff. complessi $a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$ $a_i \in \mathbb{C}$
 Se sostituisco uno $z \in \mathbb{C}$ ottengo a sua volta un numero complesso.

Def. Dato un polinomio $p(z)$ a coeff. complessi, si dice che $\alpha \in \mathbb{C}$ è radice se $p(\alpha) = 0$.

Fatto generale : se α è radice di $p(z)$, allora $p(z)$ è divisibile per $z - \alpha$, cioè si può scrivere

$$p(z) = (z - \alpha) \underbrace{q(z)}_{\text{polinomio a coeff. complessi}}$$

Def. Si dice che α è radice di $p(z)$ di multiplicità m se $p(z)$ è divisibile per $(z - \alpha)^m$ e non è divisibile per $(z - \alpha)^{m+1}$.

Teorema fondamentale dell'algebra

(di grado n)

Versione radici : ogni polinomio $p(z)$ a coeff. complessi ha esattamente n radici complesse, se contate con molteplicità.

Versione fattorizzazione : Ogni polinomio $p(z)$ a coeff. complessi di grado n si può scrivere come prodotto di esattamente n fattori di grado 1, eventualmente ripetuti (i fattori che si ripetono corrispondono a radici con molteplicità > 1).

$$p(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0 = a_n (z - \alpha_1) \cdot (z - \alpha_2) \cdot \dots \cdot (z - \alpha_n)$$

$\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sono le radici, eventualmente ripetute

Oss. Basta dim. che ogni polinomio ha ALMENO una radice per dire che ne ha ESATTAMENTE n !

$$p(z) = (z - \alpha_1) q(z) = (z - \alpha_1)(z - \alpha_2) r(z) \text{ e così via } \dots$$

$\uparrow$
 p ha radice

$\uparrow$
 q ha radice

Cosa succede se il polinomio ha coeff. reali

Continua ad essere vero che ha esattamente n radici COMPLESSE, e quindi sui complessi si scrive come prodotto di n fattori di 1° grado. Non è detto che le radici siano reali.

Fatto generale. Sia $p(x)$ un polinomio a coeff. reali.

Se $\alpha \in \mathbb{C}$ è radice di $p(x)$, allora anche $\bar{\alpha}$ è radice di $p(x)$.

Se α ha molteplicità m , anche $\bar{\alpha}$ ha molteplicità m .

Di conseguenza le radici di $p(x)$ ^{a coeff. reali} sono di 2 tipi

→ radici reali

→ coppie di radici complesse coniugate.

Consideriamo una coppia di radici complesse coniugate: $a+bi$, $a-bi$ ($b \neq 0$).

Mettiamo insieme i 2 fattori che producono nella fattorizzazione

$$\begin{aligned} (x - (a+bi))(x - (a-bi)) &= x^2 + x(-a+bi - a-bi) + (a+bi)(a-bi) \\ &= x^2 - 2ax + (a^2 + b^2) \end{aligned}$$

I due fattori erano a coeff. complessi, ma il loro prodotto è a coeff. reali.

Teorema Ogni polinomio $p(x)$ a coeff. reali è prodotto di fattori di 1° o 2° grado a coeff. reali.

→ I fattori di 1° grado corrispondono alle radici reali

→ I fattori di 2° grado si ottengono mettendo insieme a 2 a 2 i fattori complessi relativi a coppie di radici complesse coniugate.

Dim. che α radice $\Rightarrow \bar{\alpha}$ radice $p(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i \quad a_i \in \mathbb{R}$

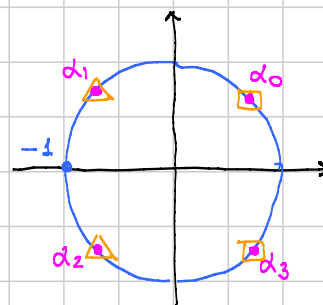
$$\begin{aligned} \alpha \text{ radice} \Rightarrow p(\alpha) = 0 &\Rightarrow \sum_{i=0}^n a_i \alpha^i = 0 \Rightarrow \overline{\sum_{i=0}^n a_i \alpha^i} = 0 = \sum_{i=0}^n \overline{a_i} \bar{\alpha}^i \\ &= \sum_{i=0}^n a_i \bar{\alpha}^i = p(\bar{\alpha}) = 0 \Rightarrow \bar{\alpha} \text{ radice.} \end{aligned}$$

Esempio $p(x) = x^4 + 1$ Non ha radici reali.

Ma per forza 4 radici complesse, se contate con molteplicità.

Per trovarle risolvo $x^4 = -1$, che vuol dire trovare le radici quarte di -1 .

$$-1 = 1 \cdot e^{i\pi} \Rightarrow \text{una radice quarta è } \alpha_0 = e^{i\frac{\pi}{4}}$$



In forma cartesiana

$$\alpha_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i, \quad \alpha_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$\alpha_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i, \quad \alpha_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

Ora posso scrivere la fattorizzazione sui complessi

$$x^4 + 1 = (x - \alpha_0)(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3)$$

$$= \left(x - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) \left(x + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) \left(x + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) \left(x - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$$

Per avere la fattorizzazione sui reali accoppio i fattori provenienti da coppie di radici coniugate

$$x^4 + 1 = (x - \alpha_0)(x - \alpha_3) \cdot (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) = (x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1)$$

$$\begin{aligned} (x - \alpha_0)(x - \alpha_3) &= (x - \alpha_0)(x - \bar{\alpha}_0) = x^2 - (\alpha_0 + \bar{\alpha}_0)x + \alpha_0 \bar{\alpha}_0 \\ &= x^2 - 2 \operatorname{Re}(\alpha_0)x + |\alpha_0|^2 \\ &= x^2 - \sqrt{2}x + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Analogamente: } (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) &= (x - \alpha_1)(x - \bar{\alpha}_1) \\ &= x^2 - 2 \operatorname{Re}(\alpha_1)x + |\alpha_1|^2 \\ &= x^2 + \sqrt{2}x + 1 \end{aligned}$$

Altro esempio. Fattorizzare sui reali $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = p(x)$

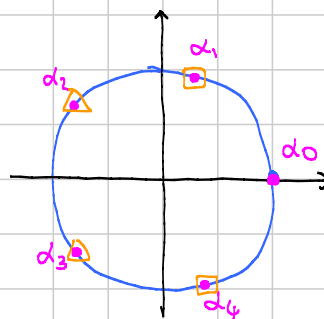
Passo dai complessi, quindi cerco le radici complesse.

$$(x^5 - 1) = (x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$$

Quindi le radici del $p(x)$ dato sono le radici di $x^5 - 1$ meno la radice $x = 1$. Le radici di $x^5 - 1$ sono le radici complesse quinte di 1, quindi sono 1 + le 4 che completano il pentagono

$$\alpha_k = e^{\frac{2k\pi i}{5}}$$

Per ottenere la fattorizzazione sui reali devo accoppiare



$$(x - \alpha_1)(x - \alpha_4) = (x - \alpha_1)(x - \bar{\alpha}_1) = x^2 - 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)x + 1$$

$$(x - \alpha_2)(x - \alpha_3) = \dots = x^2 - 2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)x + 1$$

[Esercizio: mettere i passaggi mancanti].

ANALISI MATEMATICA 1 - LEZIONE 104

Titolo nota

14/12/2012

ESPOENZIALE E LOGARITMO COMPLESSO e^z $z \in \mathbb{R}$

Def. Se $z = a + bi$, allora $e^z = e^{a+ib} = e^a \cdot e^{ib} = e^a (\cos b + i \sin b)$

$$e^{a+ib} = e^a (\cos b + i \sin b)$$

Quindi e^{a+bi} è un numero complesso che ha come modulo e^a e come argomento b .

Esempio 1 $e^{7-5i} = e^7 (\cos(-5) + i \sin(-5)) = e^7 (\cos 5 - i \sin 5)$

Sorpresa: $z \rightarrow e^z$ è una funzione periodica nel senso che

$$e^{z+2\pi i} = e^z \quad (\text{il periodo è } 2\pi i)$$

Dim. Se $z = a + bi$, allora $e^{z+2\pi i} = e^{a+(b+2\pi)i} =$ (uso definizione)

$$= e^a (\cos(b+2\pi) + i \sin(b+2\pi)) = e^a (\cos b + i \sin b) = e^z.$$

Esempio 2 $e^i = e^{0+i} = e^0 (\cos 1 + i \sin 1) = \cos 1 + i \sin 1$

Interpretazione con la serie Supponiamo di voler definire $e^{i\theta}$.

Sui reali avevamo che

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \dots$$

conetto dopo video

Poniamo $x = i\theta$. Diventa (ricordando che $i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1, i^5 = i, \dots$)

$$e^{i\theta} = 1 + i\theta - \frac{1}{2}\theta^2 - \frac{1}{3!}i\theta^3 + \frac{1}{4!}\theta^4 + \frac{1}{5!}i\theta^5 - \frac{1}{6!}\theta^6 - \frac{1}{7!}i\theta^7 + \dots$$

= $\cos \theta + i \sin \theta$

aggiunto dopo video

LOGARITMO COMPLESSO

Dato un numero $w \in \mathbb{C}$, cercare il logaritmo di w vuol dire cercare i numeri complessi z tali che $e^z = w$

Fatto generale

→ Se $w = 0$, allora non esiste nessuno $z \in \mathbb{C}$ t.c. $e^z = 0$

→ Se $w \neq 0$, allora esistono infiniti $z \in \mathbb{C}$ t.c. $e^z = w$.

Quindi il logaritmo non è unico: le infinite soluzioni si ottengono le une dalle altre per via della periodicità della funzione e^z .

Dato w , come si calcolano i possibili z

Si scrive w in forma esponenziale e z in forma cartesiana.

$$w = r e^{i\varphi} \quad z = a + bi \quad \text{Impongo } e^z = w$$

$$e^{a+bi} = r e^{i\varphi} \quad ; \quad \boxed{e^a} \cdot \boxed{e^{bi}} = \boxed{r} \cdot \boxed{e^{i\varphi}}$$

$$\begin{cases} e^a = r & (\text{stesso modulo}) \\ b = \varphi + 2k\pi & (\text{stesso argomento a meno di multipli interi di } 2\pi) \end{cases}$$

Quindi

$$\boxed{a = \log r}$$



se $w \neq 0$, allora $r > 0$ e questo è il log di numeri reali > 0

$$\boxed{b = \varphi + 2k\pi}$$



Ai variare di $k \in \mathbb{Z}$ fornisce le infinite soluzioni.

Esempio 1 Risolvere sui complessi $e^z = 1$. Applico la formula.

Devo trovare r e φ scrivendo w (che sarebbe 1) in forma esponenziale

$$1 = 1 \cdot e^{0i} \Rightarrow r = 1, \varphi = 0$$

Allora le soluzioni sono $z = a + bi$ con

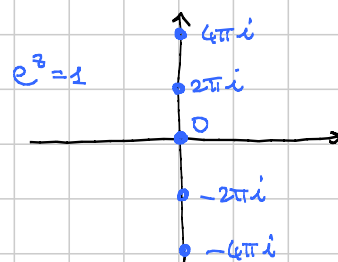
$$a = \log 1 = 0$$

$$b = \varphi + 2k\pi = 2k\pi$$

le soluzioni sono

$$z = 2k\pi i$$

Quindi ho la soluzione $z=0$, che ovviamente mi aspettavo essendo la soluzione reale di $e^z=1$ più tutte le sue traslate di $2\pi i$.
Nel piano di Gauss queste soluzioni sono infiniti punti sull'asse immaginario



Esempio 2 Risolvere $e^z = -1$
Sui reali non ci sarebbero soluzioni.
Sui complessi sì. Scrivo -1 in forma esponenziale:

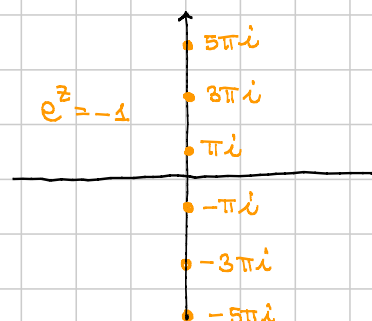
$$-1 = 1 \cdot e^{i\pi}$$

Quindi $r=1$ e $\varphi=\pi$. Allora

$$a = \log 1 = 0 \quad e \quad b = \pi + 2k\pi$$

Quindi le soluzioni sono

$$z = a + bi = (\pi + 2k\pi) i$$



Esempio 3 $e^z = -\sqrt{3} + i$

Scrivo $-\sqrt{3} + i$ in forma esponenziale.

$$|-\sqrt{3} + i| = \sqrt{3+1} = 2, \text{ quindi}$$

$$-\sqrt{3} + i = 2 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) = 2 \cdot e^{\frac{5\pi}{6}i}$$

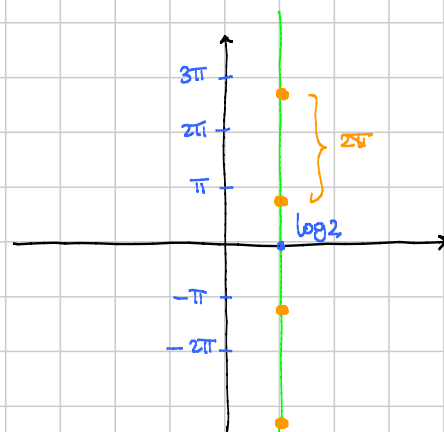
$\swarrow \quad \nwarrow$
 $\cos \frac{5\pi}{6} \quad \sin \frac{5\pi}{6}$

Allora $r=2$ e $\varphi = \frac{5\pi}{6}$. Dalla formula per il logaritmo otteniamo che

$$a = \log 2 = \log 2, \quad b = \varphi + 2k\pi = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$

Le soluzioni sono $z = \log 2 + \left(\frac{5\pi}{6} + 2k\pi \right) i$

$a + bi$



Esempio 4 Risolvere $e^z = -5 + 7i$

Devo scrivere $-5 + 7i$ in forma esponenziale

$$r = |-5 + 7i| = \sqrt{25 + 49} = \sqrt{74}$$

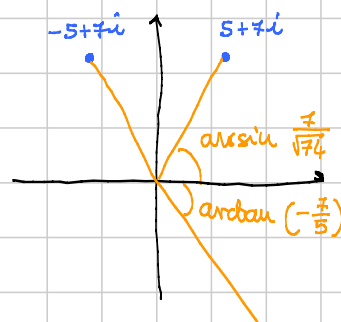
$$-5 + 7i = \sqrt{74} \left(-\frac{5}{\sqrt{74}} + i \frac{7}{\sqrt{74}} \right)$$

$\uparrow$ $\cos \theta$ $\uparrow$ $\sin \theta$

Il θ corrispondente non è un angolo notevole.

$$\frac{\sin \theta}{\cos \theta} = -\frac{7}{5} \leadsto \theta = \arctan\left(-\frac{7}{5}\right) + \pi$$

corrispondente
angolo nel 2°
quadrante



Quali delle seguenti formule è corretta?

$$\theta = \arcsin\left(\frac{7}{\sqrt{74}}\right) \quad \text{NO! arcsin non dà valori nel 2° quadrante}$$

$$\theta = \arccos\left(-\frac{5}{\sqrt{74}}\right) \quad \text{OK! arccos fornisce valori in } [0, \pi]$$

Conclusione esercizio: $a = \log 1 = \log \sqrt{74} = \frac{1}{2} \log 74$

$$b = \arccos\left(-\frac{5}{\sqrt{74}}\right) + 2k\pi \quad \text{oppure}$$

$$b = \arctan\left(-\frac{7}{5}\right) + \pi + 2k\pi$$

ANALISI MATEMATICA 1 - LEZIONE 105

Titolo nota

14/12/2012

SENDO E COSENO IPERBOLICO IN $\mathbb{C}$

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

Scrivendo $z = a+bi$, si può espandere l'esponenziale complesso.

Caso speciale: supponiamo che z sia immaginario puro $z = i\theta$

Sostituendo si ottiene

$$\cosh(i\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \frac{\cancel{\cos\theta} + i\cancel{\sin\theta} + \cos\theta - i\cancel{\sin\theta}}{2} = \cos\theta$$

$$\sinh(i\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2} = \frac{\cancel{\cos\theta} + i\cancel{\sin\theta} - \cancel{\cos\theta} + i\cancel{\sin\theta}}{2} = i\sin\theta$$

SENDO E COSENO DI UN NUMERO COMPLESSO

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

$$e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$$

Quindi $\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Per estensione si definisce

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

Esempio $\sin(i) = \frac{e^{i^2} - e^{-i^2}}{2i} = \frac{e^{-1} - e^1}{2i} = \frac{1}{i} \frac{e^{-1} - e^1}{2}$

$$= \frac{1}{i} \sinh(-1) = -\frac{1}{i} \sinh 1$$

$$\left(\frac{1}{i} = -i\right)$$

$$= i \sinh 1$$

$$\cos(i) = \frac{e^{-1} + e^1}{2} = \cosh 1$$

Esempio 2 Risolvere l'equazione $\sin z = 2012$

Sui reali non ci sono soluzioni. Sui complessi ce ne sono infinite...

Uso la formula

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 2012, \text{ quindi } e^{iz} - e^{-iz} = 4024i$$

Pongo $w = e^{iz}$ e l'equazione diventa $w - \frac{1}{w} = 4024i$

$$w^2 - 1 = 4024i w, \text{ cioè } w^2 - 4024i w - 1 = 0$$

Si tratta di una eq. di 2° grado in w che risolvo con la formula

$$w_{1,2} = 2012i \pm \sqrt{-2012^2 + 1}$$

$$\Delta = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac = (2012i)^2 + 1$$

$$= (2012 \pm \sqrt{2012^2 - 1}) i$$

Quindi per w ho trovato 2 soluzioni immaginarie pure:

$$w_1 = A i \quad w_2 = B i \quad \text{con } A = 2012 + \sqrt{2012^2 - 1}, \quad B = 2012 - \sqrt{2012^2 - 1}$$

$\downarrow \in \mathbb{R} \quad \quad \downarrow \in \mathbb{R}$

$$\text{Ora devo risolvere } e^{iz} = w_1 \quad e^{iz} = w_2$$

cioè devo fare i logaritmi complessi.

$$e^{iz} = A i = A e^{\frac{\pi}{2}i} \Rightarrow r = A, \quad \varphi = \frac{\pi}{2}, \text{ da cui}$$

$$a = \log A \quad b = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \text{ quindi } iz = a + bi = \log A + \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)i$$

da cui $z = -\log A \cdot i + \frac{\pi}{2} + 2k\pi$. Analogamente da w_2 trovo

$\uparrow$
dividere per i
= moltiplicare per $-i$

$$z = -\log B i + \frac{\pi}{2} + 2k\pi i$$

Se andiamo a disegnare le soluzioni nel piano di Gauss troviamo due successioni infinite di punti.

Ora

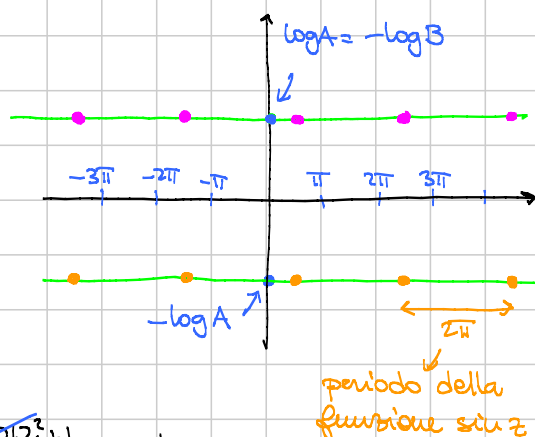
$$A = 2012 + \sqrt{2012^2 - 1}$$

$$\Rightarrow \log A > 0$$

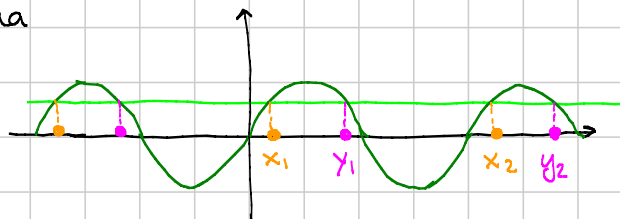
$$B = 2012 - \sqrt{2012^2 - 1}$$

$$= (2012 - \sqrt{\dots}) \frac{2012 + \sqrt{\dots}}{2012 + \sqrt{\dots}} = \frac{2012^2 - 2012^2 + 1}{2012 + \sqrt{\dots}} = \frac{1}{A}$$

$$B = \frac{1}{A} \Rightarrow \log B = -\log A$$



Osservazione Sui reali, quando risolviamo $\sin x = \lambda$ con $\lambda \in (-1, 1)$ troviamo 2 famiglie infinite di soluzioni, entrambe ottenute traslando una "prima soluzione" di multipli di 2π



Quale relazione c'è tra x_1 e y_1 ?

La relazione è $y_1 = \pi - x_1$, quindi i termini della seconda famiglia sono π - termini della 1ª famiglia

La stessa cosa è successa in ambito complesso. Infatti

$$1^a \text{ famiglia} = -\log A \cdot i + \frac{\pi}{2} + 2k\pi i$$

$$\begin{aligned} \text{Faccio } \pi - 1^a \text{ famiglia} &= \pi + \log A \cdot i - \frac{\pi}{2} - 2k\pi \\ &= \log A \cdot i + \frac{\pi}{2} - 2k\pi \\ &= -\log B \cdot i + \frac{\pi}{2} - 2k\pi \end{aligned}$$

} tolte le i dopo video.

↑ Ho usato che $-\log A = \log B$ ↑ segno + o - è la stessa cosa perché $k \in \mathbb{Z}$.

Oss. lo stesso procedimento mostra che $\sin z$, $\cos z$, $\sinh z$, $\cosh z$, viste come $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, sono surgettive, ma non iniettive in quanto periodiche!

ANALISI MATEMATICA 1 - LEZIONE 106

Titolo nota

14/12/2012

Esercizio 1 Trovare le radici del polinomio $x^4 + 2x^2 + 2 = p(x)$ Su $\mathbb{R}$ non ci sono radici in quanto $p(x) \geq 2$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.Su $\mathbb{C}$ ci devono per forza essere 4 radici, almeno se contate con molteplicità (achtung! possono essere disposte come gli spari nel piano di Gauss).Devo risolvere $x^4 + 2x^2 + 2 = 0$. Pongo $y = x^2$: $y^2 + 2y + 2 = 0$

$$y_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1-2} = -1 \pm \sqrt{-1} = -1 \pm i. \text{ Quindi ora devo risolvere}$$

 $x^2 = -1+i$ e $x^2 = -1-i$. Quindi devo fare le 2 radici quadrate di $-1+i$ e le 2 radici quadrate di $-1-i$

$$-1+i = \sqrt{2} e^{\frac{3\pi}{4}i}$$

$$x_1 = \sqrt[4]{2} e^{\frac{3\pi}{8}i}$$

radice del modulo argomento diviso per 2

$$x_2 = \sqrt[4]{2} e^{\frac{11\pi}{8}i}$$

argomento precedente $+\pi = \frac{2\pi}{2}$

$$-1-i = \sqrt{2} e^{\frac{5\pi}{4}i}$$

$$\leadsto x_3 = \sqrt[4]{2} e^{\frac{5\pi}{8}i}$$

$$x_4 = \sqrt[4]{2} e^{\frac{13\pi}{8}i}$$

Quindi ho 4 radici complesse distinte

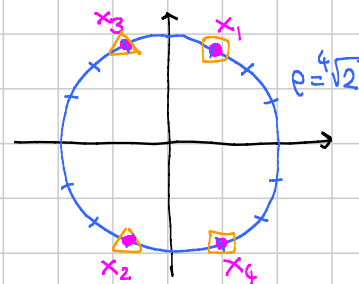
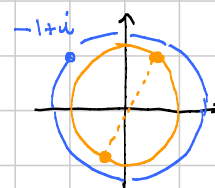
Osservazioni: le radici sono a 2 a 2

coniugate, come prevedibile

essendo il polinomio a coeff. reali

Dalle radici segue la fattorizzazione su $\mathbb{C}$

$$x^4 + 2x^2 + 2 = (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)$$



Se voglio fattorizzare su $\mathbb{R}$ accoppio le radici complesse coniugate

$$\begin{aligned} x^4 + 2x^2 + 2 &= (x - x_1)(x - x_4) \cdot (x - x_2)(x - x_3) \\ &= (x - x_1)(x - \bar{x}_1) \cdot (x - x_2)(x - \bar{x}_2) \\ &= (x^2 - 2\operatorname{Re}(x_1) \cdot x + |x_1|^2) \cdot (x^2 - 2\operatorname{Re}(x_2) \cdot x + |x_2|^2) \\ &= (x^2 - \left[2\sqrt[4]{2} \cos \frac{3\pi}{8}\right]x + \sqrt{2}) \cdot (x^2 - \left[2\sqrt[4]{2} \cos \frac{5\pi}{8}\right]x + \sqrt{2}) \end{aligned}$$

Ho usato che $x_1 = \sqrt[4]{2} e^{\frac{3\pi}{8}i} = \sqrt[4]{2} \left(\cos \frac{3\pi}{8} + i \sin \frac{3\pi}{8} \right)$

— 0 — 0 —

Esercizio 2 Risolvere $z + \bar{z} = \frac{1}{2}|z|$

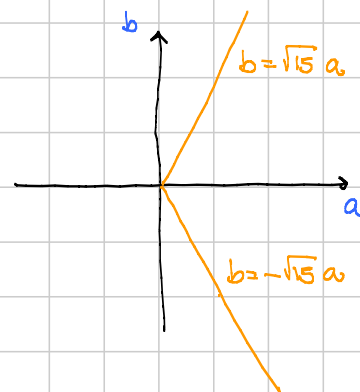
Uso forma cartesiana $z = a + bi$. Allora l'eq. diventa

$$2a = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2} \Rightarrow 4a = \sqrt{a^2 + b^2} \Rightarrow 16a^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 15a^2 = b^2$$

↑
devo aver imposto
 $a \geq 0$ prima di
fare il quadrato

Quindi $b = \pm \sqrt{15} a$, sempre con $a \geq 0$.

Quindi nel piano di Gauss sono 2 semirette (ho che $a \geq 0$) uscenti dall'origine



Esercizio 3 Risolvere $z^4 = \bar{z}^2$

Si può fare in forma cartesiana, ma quella esponenziale è più comoda visto che ci sono potenze.

$$\begin{aligned} z &= \rho e^{i\theta} \\ \bar{z} &= \rho e^{-i\theta} \end{aligned} \quad \underbrace{\rho^4 e^{4i\theta}}_{z^4} = \underbrace{\rho^2 e^{-2i\theta}}_{\bar{z}^2}$$

Impongo $\begin{cases} \rho^4 = \rho^2 \\ 4\theta = -2\theta + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$ (stesso modulo)
(argomenti sfasati di $2k\pi$)

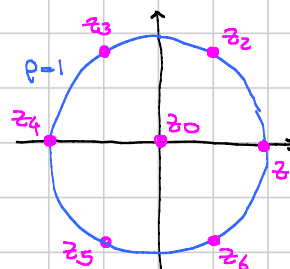
$\rho^4 = \rho^2$, $\rho^4 - \rho^2 = 0$, $\rho^2(\rho^2 - 1) = 0 \Rightarrow \rho = 0$ oppure $\rho = 1$
($\rho = -1$ si scarta in quanto $\rho \geq 0$)

Se $\rho = 0$, ottengo la soluzione $z_0 = 0$.

Se $\rho = 1$, cerco i possibili θ : $6\theta = 2k\pi$ $\theta = \frac{k\pi}{3}$ $k \in \mathbb{Z}$

Otengo 6 soluzioni con $k = 0, 1, \dots, 5$ e poi si ripetono

$z_1 = 1 \cdot e^{i0} = 1$, $z_2 = 1 \cdot e^{i\frac{\pi}{3}}$, $z_3 = 1 \cdot e^{i\frac{2\pi}{3}}$, ...



Conclusione: l'equazione ha 7 soluzioni, che volendo sono $z_0 = 0$ più le 6 radici seste di 1.

Se serve, si possono scrivere facilmente in forma cartesiana, ad esempio $z_5 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

Approccio alternativo Abbiamo $z^6 = \bar{z}^2$. Moltiplico a dx e sx per z^2 , ottengo

$$z^6 = \bar{z}^2 \cdot z^2 = (z \cdot \bar{z})^2 = |z|^4$$

Quindi ho ottenuto l'eq. $z^6 = |z|^4$. Ora faccio il modulo a dx

e sx $|z^6| = |z|^6$ uso che modulo prodotto = prodotto moduli

$|z^4| = |z|^4$ perchè $|z|^4$ è un reale ≥ 0 .

Ho così ottenuto $|z|^6 = |z|^4$, cioè $\rho^6 = \rho^4$ da cui $\rho = 0$ opp. $\rho = 1$

Se $\rho = 0$ come prima.

Se $\rho = 1$ l'eq. $z^6 = |z|^4$ è diventata $z^6 = 1$, da cui è immediato che z sono le radici seste di 1.

Esercizio 4 Risolvere $z^6 = -|\bar{z}|$

Forma esponenziale: $z = \rho e^{i\theta}$ $|\bar{z}| = |z| = \rho$

$z^6 = \rho^6 e^{6i\theta}$ $-|\bar{z}| = -\rho$

ANALISI MATEMATICA 1 - LEZIONE 107

Titolo nota

15/12/2012

Esempio 1 $u' + 2u = \arctan t$ Domanda: come si comportano le soluzioni per $t \rightarrow +\infty$?Fatto 1: la soluzione è definita per ogni $t \in \mathbb{R}$. Questo perché l'eq. è lineare, dunque se non hanno problemi i coeff. o il termine noto non ci ha nemmeno la soluzioneFatto 2: posso vedere l'eq. come lineare del 1° ordine o come lineare a coeff. costantiVedendola come lin. a coeff. costanti dovrai fare prima l'omog. $u' + 2u = 0$ e questa ha come soluz. $u(t) = c e^{-2t}$ (polinomio: $x+2=0 \Rightarrow x=-2$)

Problema: come trovare una soluz. speciale (tentativi non se ne vedono).

Variazione delle costanti: $u(t) = c(t) e^{-2t}$ $u' = c'(t) e^{-2t} - 2c(t) e^{-2t}$

Sostituendo trovo

$$c'(t) e^{-2t} - 2c(t) e^{-2t} + 2c(t) e^{-2t} = \arctan t$$

$$\text{Quindi } c'(t) = e^{2t} \cdot \arctan t \Rightarrow c(t) = \int e^{2t} \cdot \arctan t \, dt$$

Soluzione generale eq. non omogenea:

$$u(t) = \underbrace{c e^{-2t}}_{\substack{\text{sol. gen.} \\ \text{omogenea}}} + e^{-2t} \underbrace{\int e^{2t} \cdot \arctan t \, dt}_{\text{primitiva di } e^{2t} \cdot \arctan t}$$

Domanda: come calcolare il lim $u(t)$ senza avere una formula esplicita per la primitiva.

Funzioni integrali. Chiamo $F(t)$ una qualunque primitiva di $e^{2s} \cdot \arctan s$, ad esempio

$$F(t) = \int_0^t e^{2s} \arctan s \, ds$$

Domanda: calcolare $\lim_{t \rightarrow +\infty} \boxed{e^{-2t}} \boxed{F(t)}$
 $\downarrow \quad \downarrow$
 $0 \quad +\infty$

$\lim_{t \rightarrow +\infty} F(t) = \int_0^{+\infty} e^{2s} \arctan s \, ds = +\infty$ per tante ragioni, ad esempio perché $e^{2s} \arctan s \geq 3/2$ per s abbastanza grande. (tende a $+\infty$)

Quindi il limite è una forma indeterminata.

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{F(t)}{e^{2t}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{F'(t)}{2e^{2t}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^{2t} \cdot \arctan t}{2e^{2t}} = \frac{\pi}{4}$$

$\uparrow$
[0: $+\infty$]

Di conseguenza: qualunque sia la condizione iniziale, dunque qualunque sia il valore di c , avremo che

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) = \frac{\pi}{4}$$

Quindi la soluzione è sempre limitata per $t \rightarrow +\infty$.

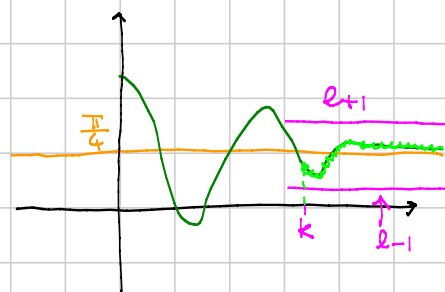
Fatto generale: se $u(t)$ è definita per $t \geq 0$, continua e tende ad un limite reale per $t \rightarrow +\infty$, allora $u(t)$ è limitata per $t \geq 0$.

Dim. rigorosa Visto che $f(x) \rightarrow l \in \mathbb{R}$,
 avremo che $l-1 \leq f(x) \leq l+1$ per x
 grandi. Dedito meglio: $\exists k \geq 0$ b.c.

$$l-1 \leq f(x) \leq l+1 \quad \forall x \geq k$$

Nell'intervallo $[0, k]$ posso usare Weierstrass e ho

che $m \leq f(x) \leq M$. Quindi $f(x)$ è limitata per ogni $x \geq 0$.
 $\uparrow$ $\uparrow$
 minimo Massimo



Esempio 2 $u' - 2u = \arctan t$

Risolvendo come prima arriviamo alla formula generale

$$u(t) = c e^{2t} + e^{2t} \int_0^t e^{-2s} \arctan s \, ds$$

Ora $F(t) = \int_0^t e^{-2s} \arctan s \, ds$

Cosa succede a $u(t)$ quando $t \rightarrow +\infty$? Intanto esaminiamo

$\lim_{t \rightarrow +\infty} F(t) = \int_0^{+\infty} e^{-2s} \arctan s \, ds$ e questo converge, ad esempio perché

$\uparrow$
 def. integrale
 improprio

$$e^{-2s} \arctan s \leq \frac{\pi}{2} e^{-2s}$$

Ora $\int_0^{+\infty} e^{-2s} \, ds < +\infty$ (si fa la primitiva) $\Rightarrow \int_0^{+\infty} e^{-2s} \arctan s \, ds < +\infty$

$\uparrow$
 confronto

Sia I il valore a cui converge l'integrale improprio. Allora

$\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) = \boxed{e^{2t}} \left(\boxed{C + F(t)} \right)$ Tutto dipende dal valore di $C+I$

$\downarrow$
 $+\infty$

$\downarrow$
 $C+I$

Nota bene: $C = u(0) =$ dato iniziale (sostituire $t=0$ nella formula per $u(t)$)

- Se $C+I > 0$, cioè se $u(0) > -I$, allora $u(t) \rightarrow +\infty$
- Se $C+I < 0$, cioè se $u(0) < -I$, allora $u(t) \rightarrow -\infty$
- Se $C+I = 0$, cioè se $u(0) = -I$, allora abbiamo una forma indetermin.

$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{C + F(t)}{e^{-2t}} \stackrel{[\frac{0}{0}: \text{H\^opital}]}{=} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{F'(t)}{-2e^{-2t}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^{-2t} \cdot \arctan t}{-2e^{-2t}} = -\frac{\pi}{4}$

Classico esempio di "VALORE SOGLIA" molto comune nelle equazioni differenziali:

- $\rightarrow u(0) > -1 \rightsquigarrow$ soluzione tende a $+\infty$
 $\rightarrow u(0) < -1 \rightsquigarrow$ soluzione tende a $-\infty$
 $\rightarrow u(0) = -1 \rightsquigarrow$ comportamento intermedio: soluzione tende a $-\frac{\pi}{4}$
 (soluzione limitata!)

Oss. Quando tende a $\pm\infty$, lo fa esponenzialmente, quindi per esempio

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^{2012t}}{u(t)} = \begin{cases} 0 & \text{se } u(0) \neq -1 \\ -\infty & \text{se } u(0) = -1 \end{cases} \quad \left[\frac{+\infty}{-\frac{\pi}{4}} \right]$$

ANALISI MATEMATICA 1 - LEZIONE 108

Titolo nota

15/12/2012

Esempio 1 Oscillatore armonico $u(t)$ = posizione della pallina all'istante t

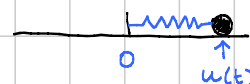
Equazione del moto

$$ma = f$$

↑ ↑
accelerazione forza

Accelerazione: $u''(t)$ Forza = costante · allungamento = $-k u(t)$

↑
la molla "richiama"
la pallina



Equazione diventa

$$m u''(t) = -k u(t)$$

Equazione lineare 2° ordine a coeff. costanti

$$u u'' + k u = 0$$

$$\leadsto m x^2 + k = 0 \quad \leadsto x = \pm \sqrt{\frac{k}{m}} i = \text{radici complesse coniugate}$$

perché k e m sono > 0 .

La soluzione sarà del tipo

$$u(t) = a \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t\right) + b \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t\right)$$

con a e b che dipendono dalle condizioni iniziali. Si tratta comunque di soluzioni limitate e periodiche di periodo

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad \text{Vediamo se è ragionevole: Sì perché}$$

- k molto grande $\Rightarrow$ periodo molto piccolo $\Rightarrow$ oscillazioni molto veloci
 - m molto grande $\Rightarrow$ periodo molto grande $\Rightarrow$ oscillazioni molto lente.
- o — o —

Esempio 2 Oscillazioni forzate

$$\underbrace{u'' + u}_{m=k=1} = \underbrace{\sin(\omega t)}_{\text{forza esterna}}$$

Cosa succede alla soluzione? Sarà del tipo

$$u(t) = \underbrace{a \cos t + b \sin t}_{\text{dipendono da cond. iniz}} + \underbrace{\lambda \cos(\omega t) + \mu \sin(\omega t)}_{\text{si trovano } \lambda \text{ e } \mu \text{ in modo che sia solus. speciale}}$$

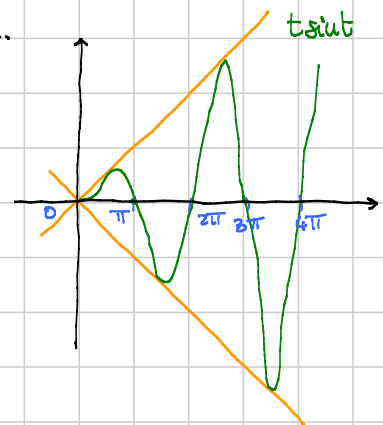
Essendo $u(t)$ somma di seni e coseni, sarà comunque per forza una soluzione limitata.

Tutto questo funziona per $\alpha \neq 1$. Per $\alpha = 1$ il tentativo da fare è diverso.

Per $\alpha = 1$ la soluzione è del tipo $u(t) = a \cos t + b \sin t + \lambda t \cos(t) + \mu t \sin(t)$

Per colpa della t la soluzione NON è più limitata.

Sta succedendo che la pallina ha oscillazioni sempre più ampie !!! La cosa succede solo se $\alpha = 1$, cioè se e solo se il periodo del termine forzante è lo stesso del sistema lasciato senza forze esterne.



Esempio 3

$$u'' + \alpha u' + u = 0$$

$$u'' = -\alpha u' - u$$

↑
attrito che
"torna contro"
se $\alpha > 0$

↑
forza di richiamo
elastica

Come sono fatte le soluzioni? Dipende dal Δ dell'equazione

- Caso $\Delta > 0 \Rightarrow$ ho 2 radici reali λ e μ e la soluzione generale è

$$u(t) = a e^{\lambda t} + b e^{\mu t}$$

$$x^2 + \alpha x + 1 = 0$$

Pecorso: $\lambda \mu = 1 \Rightarrow$ tutte e 2 positive oppure tutte e 2 negative

$\lambda + \mu = -\alpha < 0 \Rightarrow$ tutte e 2 negative

$\Rightarrow u(t) \rightarrow 0$ esponenzialmente.

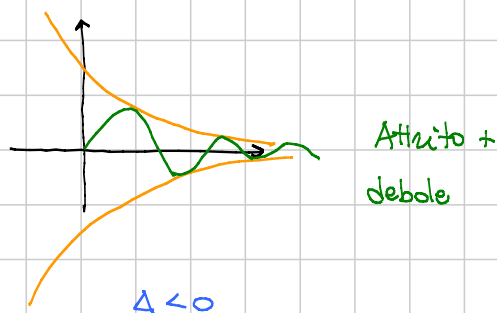
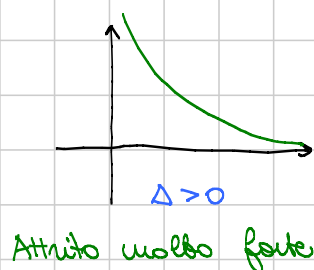
- Caso $\Delta < 0 \Rightarrow$ ho radici complesse coniugate $A \pm Bi$. La soluzione generale dell'equazione è

$$u(t) = a e^{At} \cos(Bt) + b e^{At} \sin(Bt).$$

La somma delle radici del polinomio è $2A = -\alpha \Rightarrow A < 0$

$\Rightarrow$ ancora una volta le soluzioni sono smorzate e tendono a 0 !!

L'andamento qualitativo nei 2 casi è diverso



$$\Delta = \alpha^2 - 4$$

Se $\alpha > 2$ si ha $\Delta > 0$

Se $\alpha \in (0, 2)$ si ha $\Delta < 0$

Domanda: è possibile ora ottenere soluzioni non limitate con un termine forzante del tipo $\sin(\alpha t)$?

No! Perché il tentativo con $\lambda \sin(\alpha t) + \mu \cos(\alpha t)$

fornisce sempre, dal momento che l'eq. omogenea non ha sin e cos PURI tra le sue soluzioni.

ANALISI MATEMATICA 1 - LEZIONE

Titolo nota

15/12/2012

VF1 La serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$ converge

V

VF2 $x=0$ è un punto di minimo relativo per la funzione $f(x) = \sinh x$

F

VF3 $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tale che $\arctan(x^{27}) \leq \lambda \forall x \in \mathbb{R}$

V

VF4 La funzione $f(x) = \sin^4 x$, vista come $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, è periodica

V

VF5 La soluzione generale dell'equazione differenziale $u''' - 4u' = 0$ è $u(t) = ae^{2t} + be^{-2t}$

F

VF6 Si ha che $\frac{a_n}{n^4 + \sin(n!) - 2^n} \leq 0$ definitivamente

V

 $a_n \rightarrow -\infty$
 $\Rightarrow a_n \leq 0$ definitivamenteVF7 $\log_7(1000^{1000}) = 3000 \log_7 10$

V

 $1000^{1000} = 10^{3000}$ VF8 $\sin(2x) - x = x + o(x)$ per $x \rightarrow 0$

V

 $\sin(2x) - x = 2x + o(x) - x$
 $= x + o(x)$ $\sum \frac{2^n}{n!}$ converge ad esempio per il rapporto

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{2^n} = \frac{2 \cdot 2^n}{(n+1) \cdot n!} \cdot \frac{n!}{2^n} = \frac{2}{n+1} \rightarrow 0 < 1$$

VF2 Basta guardare il grafico

VF3 $\exists \lambda$ t.c. $\arctan(\cos x) \leq \lambda \forall x \in \mathbb{R}$ Basta prendere $\lambda = \frac{\pi}{2}$ o $\lambda = \frac{\pi}{2}$ VF4 $f(x+\pi) = f(x) \forall x \in \mathbb{R}$ 2π è un periodoDomanda: qual è il periodo minimo? In questo caso π ...VF5 $u''' - 4u' = 0 \quad x^3 - 4x = 0 \quad x(x^2 - 4) = 0 \quad x = 0, 2, -2$

$$u(t) = ae^{2t} + be^{-2t} + C$$

MC1 Consideriamo l'insieme $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 < 17\}$.

Determinare quale delle seguenti affermazioni sull'insieme A è vera.

- (A) $\inf A = \min A$ NO (B) $10 \in A$ NO (C) $\min A = 0$ NO (D) $\inf A = -\sqrt{17}$ SI
 (E) $\sup A = \max A$ NO

MC2 $\frac{5+i}{i^3} = \dots$

- (A) $-5i$ (B) $5i+1$ (C) $-5i+1$ (D) $5i-1$ (E) $5i$

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 < 17\} \quad \text{Mondo } x: \text{ soluzioni della disequazione} \\ = (-\sqrt{17}, \sqrt{17})$$

MC2 $\frac{5+i}{i^3} = \frac{5+i}{-i} \cdot \frac{i}{i} = \frac{5i-1}{1}$

MC3 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(7x)}{x} = \dots$ [$\frac{1}{0^+}$]

- (A) 0 (B) 1 ~~(C)~~ Non esiste, in quanto il limite per $x \rightarrow 0^+$ è diverso dal limite per $x \rightarrow 0^-$
 (D) 7 (E) $+\infty$

MC4 Sia $\alpha > 0$ un parametro reale. Allora la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{20^n + 1}{n^{20} + \alpha^n}$ converge se e solo se ...

- (A) $\alpha > 21$ (B) $\alpha \geq 21$ (C) $\alpha > 1$ (D) $\alpha \geq 20$ ~~(E)~~ $\alpha > 20$

MC5 Se $f(x) = \cos(\sin x)$, allora $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \dots$

$$f'(x) = -\sin(\sin x) \cdot \cos x \quad \uparrow \frac{\pi}{2}$$

- (A) -1 ~~(B)~~ 0 (C) $-\cos 1$ (D) $\cos 1$ (E) 1

MC6 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin \frac{9}{x} = \dots$

$$x \cdot \sin \frac{9}{x} \sim x \cdot \frac{9}{x} \sim 9$$

$$\frac{\sin \frac{9}{x}}{\frac{1}{x}} \sim \frac{9}{1} = 9$$

- (A) non esiste (B) $+\infty$ ~~(C)~~ 9 (D) $\frac{1}{9}$ (E) 0

$$\sum \frac{20^n + 1}{n^{20} + \alpha^n}$$

$$\frac{20^n + 1}{n^{20} + \alpha^n} \sim \frac{20^n}{\alpha^n} = \left(\frac{20}{\alpha}\right)^n$$

geometrica che converge $\Leftrightarrow \frac{20}{\alpha} < 1 \Leftrightarrow \alpha > 20$

MC7 $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+4)^2} dx = \dots$

- (A) $+\infty$ (B) $-\frac{1}{4}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) $-\frac{3}{4^3}$ (E) $\frac{3}{4^3}$

MC8 Consideriamo l'insieme $B = \{\sin x : x \leq 0\}$.

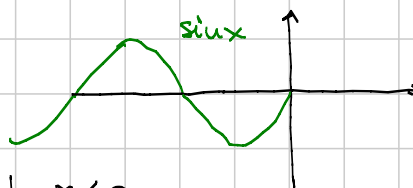
Determinare quale delle seguenti affermazioni sull'insieme B è falsa.

- (A) $\max B = 1$ (B) B è limitato inferiormente (C) B è limitato superiormente
(D) $5\pi \in B$ (E) $\min B = -1$

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+4)^2} dx &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A \frac{1}{(x+4)^2} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{x+4} \right]_0^A \\ &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{A+4} + \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$B = \{\sin x : x \leq 0\} = [-1, 1]$$

= valori assunti da $\sin x$ quando $x \leq 0$



1. Dire se esiste, ed in caso affermativo calcolare, il

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\tan x \cdot \arctan x} \left(e^{x^2} - \frac{1}{\cos x} \right).$$

Brutalmente

$$\begin{aligned} \frac{\cos x \cdot e^{x^2} - 1}{\tan x \cdot \arctan x \cdot \cos x} &\sim \frac{(1 - \frac{1}{2}x^2)(1+x^2) - 1}{x^2} \\ &= \frac{1 + x^2 - \frac{1}{2}x^2 - 1}{x^2} \rightarrow \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Rigoroso: sviluppare tutto di ordine 2.

2. Studiare, al variare del parametro $\lambda \in \mathbb{R}$, il numero di soluzioni dell'equazione

$$f(x) = |x| + \sin x = \lambda.$$

→ 0 soluzioni per $\lambda < 0$

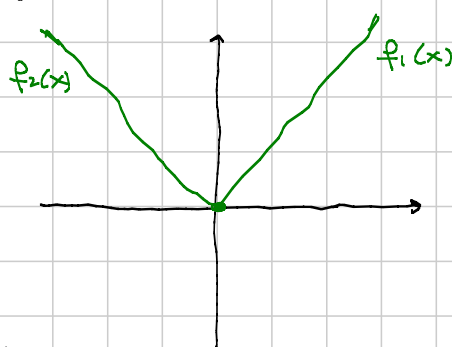
→ 1 soluzione per $\lambda = 0$

→ 2 soluzioni per $\lambda > 0$

Valore assoluto $\Rightarrow$ Distinguo i casi

$$f(x) = \begin{cases} x + \sin x = f_1(x) & \text{se } x \geq 0 \\ -x + \sin x = f_2(x) & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

Studio separatamente le 2 funzioni



$$f_1'(x) = 1 + \cos x \geq 0 \quad \text{e}$$

$$f_1'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = -1$$

$$\Leftrightarrow x = \pi + 2k\pi$$

annullamento sporadico

$f_1'(x) \geq 0$ sempre + annullamento sporadico

$\Rightarrow$ stricte. crescente (monotonia 3)

$$f_2'(x) = -1 + \cos x \leq 0 \quad \text{sempre con annullamento} \Leftrightarrow \cos x = 1$$

$$\Leftrightarrow x = 2k\pi$$

$\Rightarrow f_2(x)$ è stricte. decrescente

$$\int_0^1 \frac{x+1}{\sqrt{1-x}} dx.$$

pongo $y = \sqrt{1-x}$ quindi $y^2 = 1-x$

quindi $x = 1-y^2$, quindi $dx = -2y dy$

$$= \int \frac{1-y^2+1}{y} (-2y) dy = -2 \int (2-y^2) dy \quad \text{Occhio agli estremi!!}$$