

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 111

Titolo nota

17/12/2011

Esercizio 1 Determinare quante sono le soluzioni dell'equazione

$$x - \int_0^x e^{-t^2} dt = 2011$$

↓
servirebbe il grafico di questa funzione $f(x)$

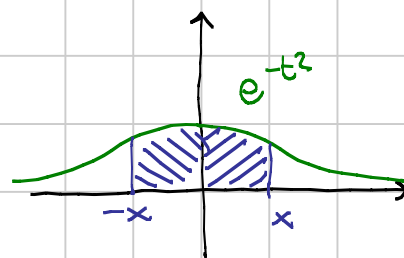
Studio della funzione $f(x)$.

• Simmetrie $f(-x) = -x - \int_0^{-x} e^{-t^2} dt$

Ho usato che e^{-t^2}
è pari e in $\int_0^{-x}$ gli
estremi sono
"al contrario"

$$\leftarrow = -x + \int_0^x e^{-t^2} dt$$

$$= -f(x) \Rightarrow \text{dispari}$$



- $f(x)$ è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$. Limiti agli estremi della zona di definizione.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \boxed{x} - \int_0^x e^{-t^2} dt = +\infty$$

↓
 $+\infty$ ↓
 $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$ che è un numero perché converge

Per disparità $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

Dai soli limiti a $\pm\infty$, più la continuità di $f(x)$ segue che f , vista come $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, è surgettiva, quindi l'eq. ha almeno una soluzione reale.

- Per studiare l'unicità studio la monotonia, cioè il segno di $f'(x)$

$$f'(x) = 1 - e^{-x^2}$$

Ora $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 1 - e^{-x^2} \geq 0 \Leftrightarrow e^{-x^2} \leq 1 \Leftrightarrow -x^2 \leq 0$, cioè sempre.
Inoltre $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x = 0$.

Per monotonia 3 si ha che $f(x)$ è strett. crescente, quindi iniettiva.
↳ ($f'(x) \geq 0$ sempre e $f'(x) = 0$ sporadicamente)

Quindi l'equazione ha soluzione unica.

Esercizio 2 Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\frac{1}{n}} \arctan(x^2) \cdot e^{x^3} dx$$

" a_n "

Intanto $a_n \geq 0$ per ogni $n \geq 1$ perché l'integrandola è ≥ 0 .

Poi $a_n \rightarrow 0$ per $n \rightarrow +\infty$ (verrebbe l'integrale tra 0 e 0...), quindi c'è la cond. nec. $\Rightarrow$ la serie potrebbe convergere.

Brutale: $\arctan(x^2) \cdot e^{x^3} \sim x^2$ per $x \rightarrow 0$, quindi

$$a_n \sim \int_0^{\frac{1}{n}} x^2 dx \sim \frac{1}{n^3} \Rightarrow \text{la serie converge.}$$

Rigoroso: fare confronto asintotico con $b_n = \frac{1}{n^3}$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^{\frac{1}{n}} \arctan(x^2) \cdot e^{x^3} dx}{\frac{1}{n^3}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x \arctan(t^2) \cdot e^{t^3} dt}{x^3}$$

$x = \frac{1}{n}$

$$= \left[\frac{0}{0} \Rightarrow \text{H\ddot{o}p} \right] \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\arctan(x^2) \cdot e^{x^3}}{3x^2} = \frac{1}{3} \neq 0 \neq +\infty$$

$\downarrow 1$

quindi $\sum a_n$ si comporta come $\sum b_n$, dunque converge.

Esercizio 3

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{\frac{1}{n^2}}^{\frac{3}{n}} \sin(x^3) \cdot \arctan x \, dx$$

"an"

Con i soliti ragionamenti si arriva a $F(x) = \int_{x^2}^{3x} \sin(t^3) \cdot \arctan t \, dt$

Situazione generale: derivare una funzione del tipo $\int_{a(x)}^{b(x)} f(t) \, dt$

Sia $G(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} f(t) \, dt$. Calcolare $G'(x)$

Chiamo $F(t)$ la primitiva di $f(t)$, cioè $F'(t) = f(t)$. Allora

$$G(x) = [F(t)]_{a(x)}^{b(x)} = F(b(x)) - F(a(x)), \text{ quindi}$$

$$G'(x) = F'(b(x)) b'(x) - F'(a(x)) a'(x) = f(b(x)) b'(x) - f(a(x)) a'(x)$$

Nell'esempio specifico:

$$\left[\int_{x^2}^{3x} \sin(t^3) \cdot \arctan t \, dt \right]' = \underbrace{\sin(27x^3) \cdot \arctan(3x)}_{a'(x)} \cdot \underbrace{3}_{b'(x)} - \sin(x^6) \cdot \arctan x^2 \cdot \underbrace{2x}_{b'(x)}$$

— o — o —

Esercizio 4 Consideriamo la successione

$$x_{n+1} = \int_0^{x_n} \frac{\arctan(t)}{\arctan(2t)} \, dt \quad x_0 = 2011, \quad \text{Studiare } \sum x_n$$

$$\text{Pongo } f(x) = \int_0^x \frac{\arctan(t)}{\arctan(2t)} \, dt$$

Proprietà di $f(x)$: $f(x) > 0$ per $x > 0$ e $f(x) = 0$ per $x = 0$

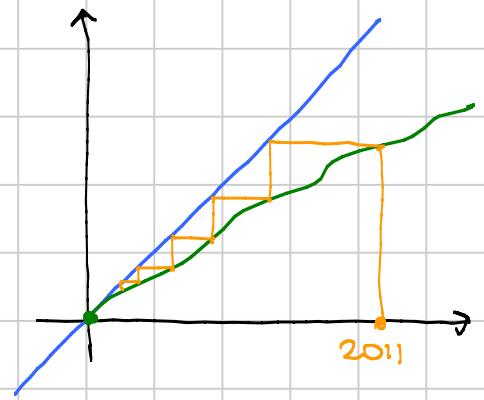
$$f'(x) = \frac{\arctan x}{\arctan(2x)} > 0 \text{ per } x > 0 \Rightarrow f \text{ è monotonamente crescente}$$

$$f(x) = \int_0^x \dots < \int_0^x 1 \, dx = x \Rightarrow f(x) \text{ sta sotto la bisettrice}$$

Per ragionevole che $x_n \rightarrow 0$

PIANO :

- (i) $x_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- (ii) $x_{n+1} \leq x_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- (iii) $x_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$
- (iv) $l = 0$



(i) Induzione + $f(x) \geq 0$ per $x \geq 0$

(ii) Ricorrenza + disequazione: $f(x_n) \leq x_n$, cioè $f(x) \leq x$

(iii) Teo. succ. monotone

(iv) Equazione $l = f(l)$ che si fa con studio di funzione.

Visto che $x_n \rightarrow 0$ la serie potrebbe convergere. La studiamo con il criterio del rapporto, dopo aver osservato che $x_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(x_n)}{x_n} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \left[\frac{0}{0} \Rightarrow \text{H\ddot{o}p} \right]$$

$\uparrow$
 $x = x_n$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(x)}{\arctan(2x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + o(x)}{2x + o(x)} = \frac{1}{2} < 1$$

Quindi la serie converge