

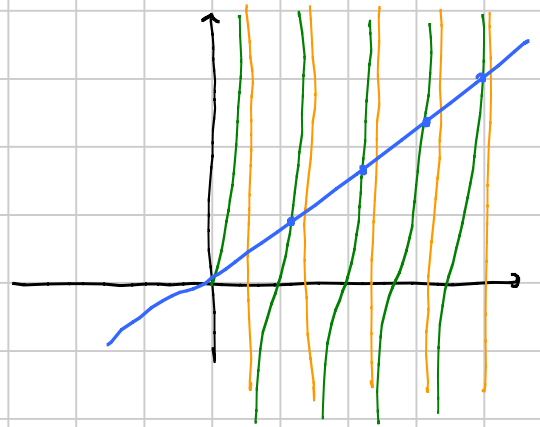
Test d'esame 2002-1.3① $\sin^3 x$ è una funzione dispari V

$$f(-x) = \sin^3(-x) = [\sin(-x)]^3 = [-\sin x]^3 = -\sin^3 x = -f(x)$$

② $\exists x \geq 2002$ t.c. $\tan x = x$ V

Sostanzialmente esiste una soluzione in ogni periodo.

Ad essere super rigorosi serve il teo. di esistenza degli zeri in ogni periodo.

③ $\cosh x + \sinh x = e^x$ V

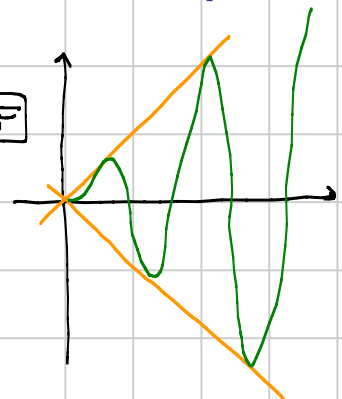
$$\cosh x + \sinh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} + \frac{e^x - e^{-x}}{2} = e^x \text{ per ogni } x \in \mathbb{R}, \text{ in particolare per } x = 0$$

④ $a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \sqrt[n]{a_n} \rightarrow 2002 \Rightarrow a_n \rightarrow 2002$ F

Se $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow l > 1$, allora $a_n \rightarrow +\infty$ per il criterio della radice

⑤ $\exists M \in \mathbb{R}$ t.c. $x \sin x \leq M$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ F

Equivalente a chiedere se $f(x) = x \sin x$ è limitata superiormente

⑥ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^{200}}$ converge F

Manca condizione necessaria oppure criterio radice

⑧ $u'' + t u' = 0$ è eq. diff. lineare F

⑨ $e^{\sin x} = 1 + x + o(x)$ per $x \rightarrow 0$ V

$$e^{\sin x} = 1 + \sin x + o(\sin x) = 1 + x + o(x)$$

$e^t \downarrow = 1 + t + o(t)$ $\sin x \downarrow = x + o(x)$

⑩ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 + 3x^3}{3x^2 - 2x^3} = -\frac{3}{2}$ Comandano potenze + grandi (raccolgo x^3).

⑪ $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x^2 + 3x^3}{3x^2 - 2x^3} = \frac{2}{3}$ $\frac{\cancel{x^2}(2+3x)}{\cancel{x^2}(3-2x)} \rightarrow \frac{2}{3}$

⑫ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 + 3x^3}{3x^2 - 2x^3} = 5$ Banale sostituzione

⑬ $\sup \left\{ \alpha \in \mathbb{R}; \int_0^1 \frac{x+1}{x^{2\alpha}} dx \text{ converge} \right\} = \frac{1}{2}$

$\frac{x+1}{x^{2\alpha}} \sim \frac{1}{x^{2\alpha}}$ converge $\Leftrightarrow 2\alpha < 1 \Leftrightarrow \alpha < \frac{1}{2}$

Rigoroso: C.A. con $g(x) = \frac{1}{x^{2\alpha}}$

⑭ $\max \{ 5n - n^2 : n \in \mathbb{N} \} =$ massimo valore assunto dalla funzione
 $= 6$ quando $n \in \mathbb{N}$

$n=0 \rightsquigarrow 0$ $n=1 \rightsquigarrow 4$ $n=2 \rightsquigarrow \boxed{6}$ $n=3 \rightsquigarrow \boxed{6}$ $n=4 \rightsquigarrow 4$

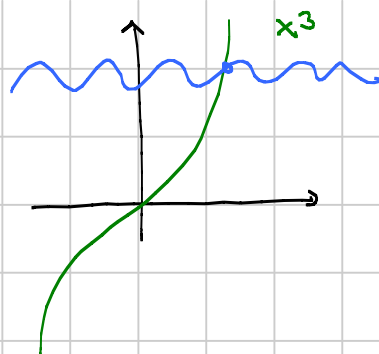
— 0 — 0 —

Testi 2004-1.1

① $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2} = \sqrt[5]{2}$ F $2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}} = 2^{\frac{5}{6}} = \sqrt[6]{2^5}$

② Se $a_n \rightarrow 2004$, allora $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow 1$ V $\sqrt[n]{a_n} = a_n^{\frac{1}{n}} \rightarrow 2004^0 = 1$
 $\downarrow$
no formula indeb.

- ③ $x^3 = \sin x + 2004$ ha almeno una soluz. reale. $\boxed{V}$



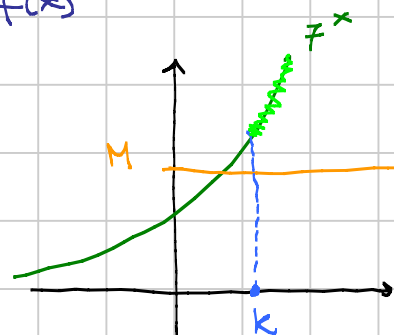
- ④ $f(x) = \sin^2(x+3)$ è periodica $\boxed{V}$

Un possibile periodo è 2π : infatti

$$f(x+2\pi) = \sin^2(x+3+2\pi) = \sin^2(x+3) = f(x)$$

- ⑤ $\forall M \in \mathbb{R} \exists k \in \mathbb{R} \text{ b.c. } f^* \geq M \quad \forall x \geq k \quad \boxed{V}$

È la definizione di $\lim_{x \rightarrow +\infty} f^* = +\infty$



- ⑦ $\sin(\sin x) = x + o(x)$ per $x \rightarrow 0$ $\boxed{V}$ sviluppi

- ⑧ $\max^2 \rightarrow 2004 \Rightarrow \sum a_n$ converge $\boxed{F}$

Brutalmente: $\max^2 \sim 2004$, $a_n^2 \sim \frac{2004}{n}$, $a_n \sim \frac{\sqrt{2004}}{\sqrt{n}}$ esp. $< 1 \Rightarrow$ diverge

Più rigorosamente, prendo $a_n = \frac{\sqrt{2004}}{\sqrt{n}}$ e si ha che il limite fa 2004 e la serie diverge.

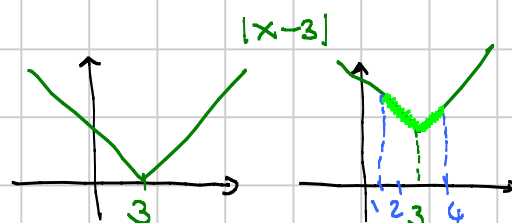
- ⑨ Sol. gen. di $u'' + 4u = 0$ è $u(t) = ae^{2t} + be^{-2t}$ $\boxed{F}$

$$u'' + 4u = 0 \rightsquigarrow x^2 + 4 = 0 \rightsquigarrow x = \pm 2i \rightsquigarrow u(t) = a \cos(2t) + b \sin(2t)$$

- ⑩ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x + x^2}{3x + 5x^2} = \frac{2}{3}$ Raccolgo x

- ⑪ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x + x^2}{3x + 5x^2} = \frac{3}{8}$ Banale sostituzione

- ⑫ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + x^2}{3x + 5x^2} = \frac{1}{5}$ Raccolgo x^2



- ⑬ $\max \{3 + |x-3| : x \in [1, 4]\} = 5$ (se la gioca su $f(1)$ ed $f(4)$)

$$\textcircled{16} \int_0^{+\infty} e^{-2x} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A e^{-2x} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{2} e^{-2x} \right]_0^A$$

$$= \lim_{A \rightarrow +\infty} \underbrace{-\frac{1}{2} e^{-2A}}_0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

— 0 — 0 —

Scritto 2007-2 : esercizio 1

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^7 + 2}{n^2 + 7} \arcsin \left(\frac{n^3 + 8}{n^8 + 3} \right) =$$

Brutale: $\sim \frac{n^7}{n^2} \cdot \arcsin \left(\frac{n^3}{n^8} \right) = n^5 \cdot \arcsin \frac{1}{n^5} \sim n^5 \cdot \frac{1}{n^5} = 1$

Rigoroso:

$$\frac{n^7 + 2}{n^2 + 7} \frac{\arcsin \left(\frac{n^3 + 8}{n^8 + 3} \right)}{\left(\frac{n^3 + 8}{n^8 + 3} \right)}$$

↓
1 per cambio variabili
+ limite notevole
— 0 — 0 —

il resto è polinomiale: basta raccogliere le potenze giuste.

2009-2 : Es. 1

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log^2(1+x-x^2) \cdot \arctan(x^2+x^3)}{\sinh^2 x - x^2} = 3$$

$$\sinh^2 x = \left(x + \frac{1}{6} x^3 + o(x^4) \right)^2 = x^2 + \frac{1}{3} x^4 + o(x^4)$$

Denominatore: $\frac{1}{3} x^4 + o(x^4)$

$$\arctan(x^2+x^3) \sim \arctan x^2 \sim x^2$$

$$\log^2(1+x-x^2) \sim \log^2(1+x) \sim x^2$$

Numeratore = $x^4 + o(x^4)$.