

Ogrande Sia $x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$ un p.to in cui fare i limiti (tipicamente $x_0 = 0$ oppure $x_0 = +\infty$),
 Si dice che $f(x) = O(g(x))$ per $x \rightarrow x_0$ se esiste una funzione $w(x)$ tale che

$$f(x) = g(x) \cdot w(x)$$

$w(x)$ è limitata in un intorno di x_0 .

Si intende che $f(x)$ e $g(x)$ sono definite almeno in un intorno di x_0 , tranne al più in x_0 .

Esempi Sia $x_0 = 0$. Allora

$$x^2 = O(x) \quad \text{per } x \rightarrow 0.$$

Uso la definizione con $f(x) = x^2$ e $g(x) = x$

$$x^2 = x \cdot x$$

$\uparrow$ $\uparrow$ $\uparrow$
 $f(x)$ $g(x)$ $w(x)$ è limitata in un intorno di $x=0$

Si ha anche che $\sin x = O(x)$ per $x \rightarrow 0$. Infatti

$$\sin x = x \cdot \frac{\sin x}{x}$$

$\uparrow$ $\uparrow$ $\uparrow$
 $f(x)$ $g(x)$ $w(x)$

Devo verificare che $w(x)$ sia limitata in un intorno di $x=0$.

Per farlo ci sono 2 possibilità

① Usare disug. classica $|\sin x| \leq |x|$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, da cui

$$|w(x)| = \left| \frac{\sin x}{x} \right| = \frac{|\sin x|}{|x|} \leq 1$$

② Osservare che $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, quindi $\frac{1}{2} \leq \frac{\sin x}{x} \leq 2$
 per ogni x suff. vicino a $x=0$.

Def. quasi equivalente Se posso dividere per $g(x)$ avremo che $f(x) = O(g(x))$
 se e solo se il rapporto $\frac{f(x)}{g(x)}$ è limitato in un intorno di x_0
 $\downarrow$
 $w(x)$

Oss. Dire che $f(x) = O(g(x))$ che informazioni dà sul $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$?

Ci dice che è limitato, dunque non può tendere a $\pm\infty$, ma può tendere ad un numero $l \in \mathbb{R}$, oppure non avere limite.

Brutalmente: dire che $f(x) = O(g(x))$ per $x \rightarrow x_0$ vuol dire che $f(x)$ "non perde" da $g(x)$

Oss. Se $f(x) = O(g(x))$ per $x \rightarrow x_0$, allora è anche vero che $f(x) = O(g(x))$ per $x \rightarrow x_0$.

Dim. Se $f(x) = O(g(x))$ vuol dire che $f(x) = g(x) \cdot w(x)$ e $\lim_{x \rightarrow x_0} w(x) = 0$.
Ma allora $-1 \leq w(x) \leq 1$ in un intorno di x_0 , quindi è verificata anche la condizione per essere $O(g(x))$.

Esercizio $\arctan(x^2) = O(x)$ per $x \rightarrow 0$, quindi anche $\arctan(x^2) = O(x)$ per $x \rightarrow 0$.

$\arctan(x^2) = O(x^2)$ per $x \rightarrow 0$. Infatti

$\frac{\arctan(x^2)}{x^2} \rightarrow 1$ per $x \rightarrow 0$, quindi il rapporto è limitato vicino a $x = 0$.

Esempi con $x_0 = +\infty$

$\log(n) = O(n)$ per $n \rightarrow +\infty$

Infatti $\log(n) = \underbrace{n}_{f(x)} \cdot \underbrace{\frac{\log n}{n}}_{g(x)} \cdot \underbrace{1}_{w(x)}$. Ora $\frac{\log n}{n} \rightarrow 0$ per $n \rightarrow +\infty$, quindi è limitato per n grandi.

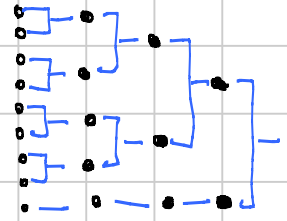
In realtà si ha pure che $\log n = O(n)$ per $n \rightarrow +\infty$

Esempi "mondo reale". Per decidere la migliore tra n squadre bisogna fare $O(n)$ partite (eliminazione diretta)

Per completare un album di n figurine in media bisogna comprarne $O(n \log n)$

Esercizio Calcolo di quante sono le partite in un torneo ad eliminazione diretta con n squadre.

Le partite sono $\frac{n}{2}$ al 1° turno, $\frac{n}{4}$ al 2° turno, $\frac{n}{8}$ al terzo turno e così via.



Detto meglio: le partite sono $\leq \frac{3}{2}$ al 1° , $\leq \frac{3}{4}$ al 2°, ... , $\leq \frac{3}{2^k}$ al k-esimo

Quindi

numero totale partite $\propto \frac{2}{3} + \frac{4}{3} + \frac{8}{3} + \frac{16}{3} + \dots$

$$= 3 \left(\underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots}_{=1} \right) = 3$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots \right) = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$$

serie geometrica con

ragione $a = \frac{1}{2}$, quindi converge

$$\text{ad } \frac{1}{1-a} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

Quindi in ogni caso Numero partite $\leq n$, il che implica che Numero partite $= O(n)$.

Oss. se $f(n) \leq g(n)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, allora $f(n) = O(g(n))$

Esercizio delle moto Abbiamo n moto tutte uguali come serbatoio e consumi. Con un pieno ogni moto fa k chilometri.

È possibile fare scole per trasferire carburante da una moto alle altre.

Quale è la max distanza raggiungibile?

Con 2 ruote si arriva $\frac{3}{2}k$ con una sosta a $\frac{k}{2}$

Con 4 ruote si arriva facilmente a 2k

Con 8 euro si arriva a $\frac{5}{2}k$

In generale con 2^n moto si arriva a $(\frac{n}{2} + 1)k$
Quindi con n moto si arriva a $O(\log_2 n)k$

Non è la cosa migliore che si può fare!

La cosa migliore è

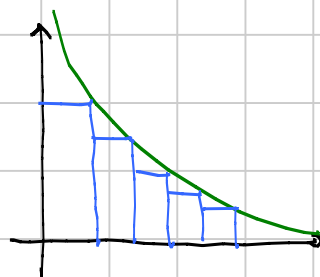
- Dopo $\frac{1}{n}$ del percorso resta $\frac{n-1}{n}$ del suborbito, quindi una moto può dare $\frac{1}{n}$ a ciascuna delle restanti $(n-1)$. In questo modo si arriva a

$$k \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-2} + \dots + \frac{1}{2} + 1 \right)$$

Quanto vale più o meno la sommatoria?

Confronto serie integrali

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} \sim \int_1^n \frac{1}{x} dx$$
$$= [\log x]_1^n = \log n$$



In questo modo: Distanza $\sim k \cdot \log n$.

