

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 108

Titolo nota

16/12/2011

Esercizio 1 Risolvere $\cos z = i$ (trovare le soluzioni $z \in \mathbb{C}$).

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = i \quad (\Leftrightarrow) \quad e^{iz} + e^{-iz} = 2i$$

$w = e^{iz}$ e l'eq. diventa $w + \frac{1}{w} = 2i$, $w^2 - 2iw + 1 = 0$

La risolvo come eq. di 2° grado (Formula ridotta):

$$w_{1,2} = i \pm \sqrt{-1-1} = i \pm \sqrt{-2} = i \pm \sqrt{2}i = \begin{matrix} \nearrow (1+\sqrt{2})i \\ \searrow (1-\sqrt{2})i \end{matrix}$$

Torno nella variabile z risolvendo

$$e^{iz} = (1+\sqrt{2})i$$

$$e^{iz} = (1-\sqrt{2})i$$

$$z = a + bi$$

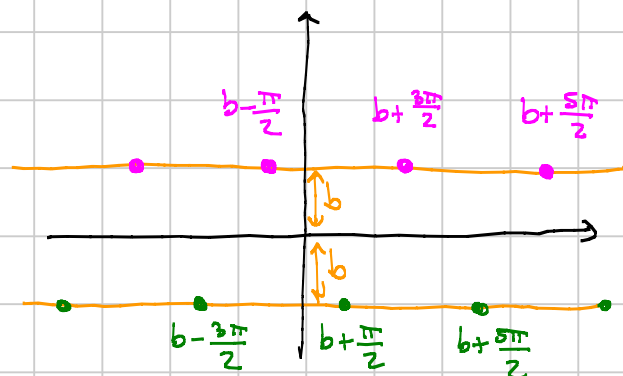
$$e^{iz} = e^{ai+bi^2} = e^{-b} \cdot e^{ai} = \underbrace{(1+\sqrt{2})}_{(1+\sqrt{2})i \text{ in forma esponenziale}} e^{\frac{\pi}{2}i}$$

$$\text{Quindi } e^{-b} = 1+\sqrt{2} \quad a = \frac{\pi}{2} + 2k\pi; \quad b = -\log(1+\sqrt{2}), \quad a = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

La seconda equazione è

$$e^{iz} = (1-\sqrt{2})i$$

Come si scrive $(1-\sqrt{2})i$ in forma esponenziale? $\underbrace{(1-\sqrt{2})}_{\text{è } < 0 !!!} e^{\frac{\pi}{2}i}$ **NO!!!**



$$(1-\sqrt{2})i = (\sqrt{2}-1)(-i) = (\sqrt{2}-1)e^{\frac{3\pi}{2}i}$$

Come prima $e^{iz} = e^{-b} \cdot e^{ai} = (\sqrt{2}-1) e^{\frac{3\pi}{2}i}$, da cui

$$e^{-b} = \sqrt{2}-1, \quad b = -\log(\sqrt{2}-1) \quad a = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$$

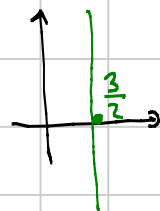
Oss. $\log(\sqrt{2}-1) = \log\left[(\sqrt{2}-1) \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1}\right] = \log \frac{1}{\sqrt{2}+1} = -\log(\sqrt{2}+1)$

Quindi il b nella seconda famiglia è l'opposto di quello della 1ª.

Esercizio 2 $z + \bar{z} = 3$ Trovare (e disegnare) tutti gli $z \in \mathbb{C}$ t.c. ...

Forma cartesiana: $z = a+bi$ $z + \bar{z} = 2a = 3$, cioè $a = \frac{3}{2}$

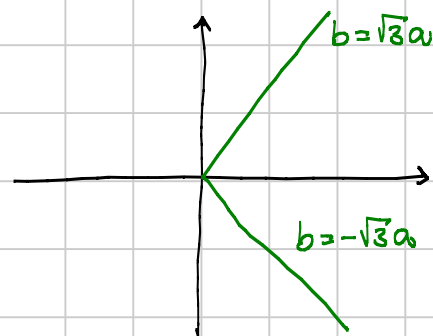
Le soluzioni sono tutti gli $z \in \mathbb{C}$ con $\operatorname{Re}(z) = \frac{3}{2}$



Esercizio 3 $z + \bar{z} = |z|$

Forma cartesiana: $z = a+bi$ $2a = \sqrt{a^2+b^2}$

Facendo i quadrati: $4a^2 = a^2 + b^2$, $b^2 = 3a^2$, $b = \pm\sqrt{3}a$
con il vincolo che deve essere $a \geq 0$



Esercizio 4 $z^2 = \mp \bar{z}$

Forma esponenziale: $z = \rho e^{i\theta}$

$$\underbrace{\rho^2 e^{2i\theta}}_{z^2} = \mp \underbrace{\rho e^{-i\theta}}_{\bar{z}}$$

$$\begin{cases} \rho^2 = \mp \rho \\ 2\theta = -\theta + 2k\pi \end{cases}$$

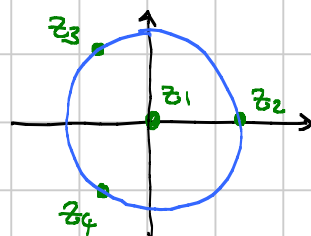
$$\begin{cases} \rho = 0 \text{ oppure } \rho = \mp \\ 3\theta = 2k\pi, \quad \theta = \frac{2k\pi}{3} \end{cases}$$

Quindi $\rho = 0 \leadsto z_1 = 0$

$\rho = \mp \leadsto$ trovo 3 soluzioni dando a k i valori $k=0,1,2$

$$z_2 = \mp \cdot e^{0i} = \mp, \quad z_3 = \mp \cdot e^{\frac{2\pi}{3}i} = \mp \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

$$z_4 = \mp \cdot e^{\frac{4\pi}{3}i} = \mp \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$



Approccio quasi equivalente: $z^2 = \mp \bar{z}$. Moltiplico a dx e a per z :

$z^3 = \mp z \bar{z}$, cioè $z^3 = \mp |z|^2$ che ponendo $z = \rho e^{i\theta}$ diventa

$$\rho^3 e^{3i\theta} = \mp \rho^2 \quad \text{da cui come prima} \quad \begin{cases} \rho^3 = \mp \rho^2 \\ 3\theta = 2k\pi \end{cases} \quad \text{Sol. come prima.}$$

Esercizio 5 $z^4 = -|\bar{z}|$ Oss. $|\bar{z}| = |z|$

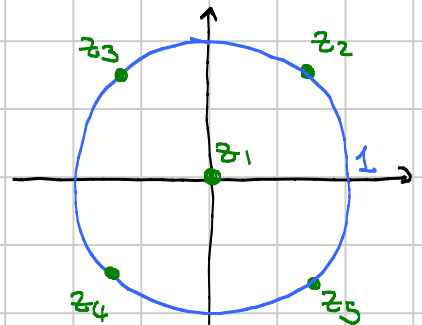
Forma esponenziale: $z = \rho e^{i\theta}$

$$\underbrace{\rho^4 e^{4i\theta}}_{z^4} = -\rho \quad \text{Achtung! } -\rho = \rho e^{i\pi} \text{ in forma esponenziale}$$

Quindi $\rho^4 e^{4i\theta} = \rho e^{i\pi}$, da cui $\begin{cases} \rho^4 = \rho \\ 4\theta = \pi + 2k\pi \end{cases} \quad \begin{cases} \rho = 0 \text{ opp. } \rho = 1 \\ \theta = \frac{\pi}{4} + k \frac{\pi}{2} \end{cases}$

Conclusioni: l'equazione ha 5 soluzioni: $\rho = 0 \leadsto z_1 = 0$,
 $\rho = 1$ e $\theta = \frac{\pi}{4} + k \frac{\pi}{2}$ con $k = 0, 1, 2, 3$

Si potrebbero scrivere in forma cartesiana,
ma sono come da disegno:



Esercizio 6 $\begin{cases} z + \bar{w} = 0 \\ \bar{z} + |w|w + 6 = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Trovare le soluzioni con } z \in \mathbb{C} \\ \text{e } w \in \mathbb{C}. \end{array}$

Ricavo z dalla prima equazione: $z = -\bar{w}$.

Sostituisco nella 2ª equazione, dopo aver osservato che $\bar{z} = \overline{-\bar{w}} = -w$

$$-w + |w|w + 6 = 0 \quad ; \quad w(|w| - 1) + 6 = 0 \Rightarrow w = \boxed{\frac{-6}{|w| - 1}}$$

è reale !!!

Essendo w reale lo diciamo x e l'equazione diventa

$$-x + |x| x + 6 = 0 \quad \text{Distinguo 2 casi}$$

• Se $x \geq 0$, l'equazione diventa $-x + x^2 + 6 = 0$, $x^2 - x + 6 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-24}}{2} \quad \text{e quindi questa non ha soluzioni reali.}$$

• Se $x \leq 0$, l'equazione diventa $-x - x^2 + 6 = 0$, $x^2 + x - 6 = 0$

$$(x+3)(x-2) = 0, \quad \text{da cui } x = -3 \quad \text{oppure } \boxed{x = 2}$$

↓ scartata perché serve $x \leq 0$

In conclusione $w = x = -3$, $z = -\bar{w} = +3$.

L'unica soluzione è $(z, w) = (3, -3)$.