

Esempio 1
$$\begin{cases} u'' + 3u' - 4u = 0 \\ u(0) = \alpha \\ u'(0) = 0 \end{cases}$$

Determinare per quali $\alpha \geq 0$ la soluzione è limitata per $t \geq 0$.

Eq. lineare omog. a coeff. cost. $\leadsto x^2 + 3x - 4 = 0 \leadsto (x+4)(x-1) = 0$
 $\leadsto x = -4$ e $x = 1 \leadsto$ base: e^{-4t}, e^t .

Sol. gen.: $u(t) = a e^{-4t} + b e^t$

Tale funzione è limitata se e solo se $b = 0$ (altrimenti $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) = \pm\infty$)

Determino a e b in funzione dei dati iniziali

$$\alpha = u(0) = a + b \quad u'(t) = -4a e^{-4t} + b e^t$$

$$0 = u'(0) = -4a + b$$

Ho quindi il sistema
$$\begin{cases} a + b = \alpha \\ -4a + b = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} 1^a - 2^a: 5a = \alpha \Rightarrow a = \frac{\alpha}{5} \\ \text{Dalla } 1^a: b = \alpha - a = \alpha - \frac{\alpha}{5} = \frac{4}{5}\alpha \end{array}$$

Di conseguenza la soluzione è limitata per $t \geq 0 \Leftrightarrow b = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$.
 — 0 — 0 —

Esempio 2 $u'' + \alpha u' + 27u = 0$

Domanda: per quali valori di α la soluzione è limitata per ogni $t \geq 0$.

Oss. Nel caso $\alpha = 0$ troviamo l'equazione $u'' + 27u = 0$ (la solita molla, "oscillatore armonico"), la cui soluzione generale è

$$u(t) = a \cos(\sqrt{27} t) + b \sin(\sqrt{27} t)$$

la quale è limitata per ogni $t \in \mathbb{R}$ e non solo per $t \geq 0$.

Ora uno dovrebbe: $\rightarrow$ considerare $x^2 + \alpha x + 27 = 0$ e vedere come sono fatte le radici al variare di α .

A seconda di $\Delta = \alpha^2 - 4 \cdot 27$ le radici saranno reali o complesse.

Caso in cui le radici sono reali e distinte : $x = \lambda$ e $x = \mu$

la soluzione generale sarà

$$u(t) = a e^{\lambda t} + b e^{\mu t}$$

L'essere in limitata dipende dal segno di λ e μ . Ora sappiamo che

$\lambda \cdot \mu = 2\tau$ e $\lambda + \mu = -\alpha$ (fatto precorsistico)

stesso segno Se $\alpha > 0$, allora λ e μ sono < 0

Se $\alpha < 0$, allora λ e μ sono > 0

Quindi nel caso di radici reali distinte le soluzioni sono tutte limitate $\Leftrightarrow \alpha > 0$.

Caso in cui le radici sono reali e coincidenti : $u(t) = a e^{\lambda t} + b t e^{\lambda t}$

Ancora una volta la limitatezza dipende dal segno di λ , quindi ancora dal segno di α .

Caso di radici complesse coniugate $x = a \pm i b$. La sol. gen. è

$$u(t) = c_1 e^{at} \cos(bt) + c_2 e^{at} \sin(bt)$$

Tale espressione è limitata per $t \geq 0$ se e solo se $a < 0$.

Ricordiamo che la somma delle 2 radici è $-\alpha$, ma è anche $2a$, quindi sol. limitate $\Leftrightarrow a < 0 \Leftrightarrow \alpha > 0$.

Quindi anche in questo caso abbiamo sol. lim. per $t \geq 0 \Leftrightarrow \alpha > 0$.

Conclusione: in tutti i casi abbiamo trovato che sol. limitate $\Leftrightarrow \alpha \geq 0$ ($\alpha = 0$ considerato a parte prima).

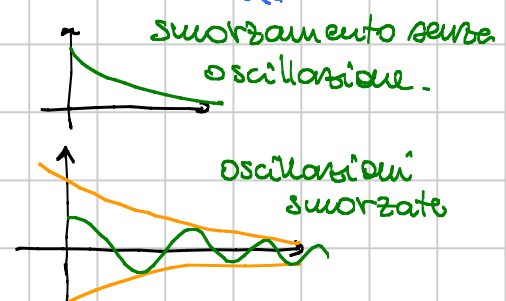
Modellino : $u'' + \alpha u' + 2\tau u = 0$, $u'' = \underbrace{-2\tau u}_{\text{forza di richiamo}} - \underbrace{\alpha u'}_{\text{termine contrario (}\alpha > 0\text{) proporzionale alla velocità: attrito dell'aria.}}$

Oss. Differenza tra caso $\Delta > 0$ e $\Delta < 0$

$\rightarrow \Delta > 0$: esponenziali con esp. neg.

$\rightarrow \Delta < 0$: " " " " per

$\sin$ e $\cos$



Esempio 3

$$\begin{cases} u' = \sin u \\ u(0) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Eq. a variabili separabili

$$\frac{du}{dt} = \sin u; \quad \frac{du}{\sin u} = dt$$

$$\int \frac{du}{\sin u} = t + c$$

↓ si può fare la primitiva, ma poi è difficile ricavare u ...

Obiettivo: capire come è fatta la soluzione senza risolvere esplicitamente.

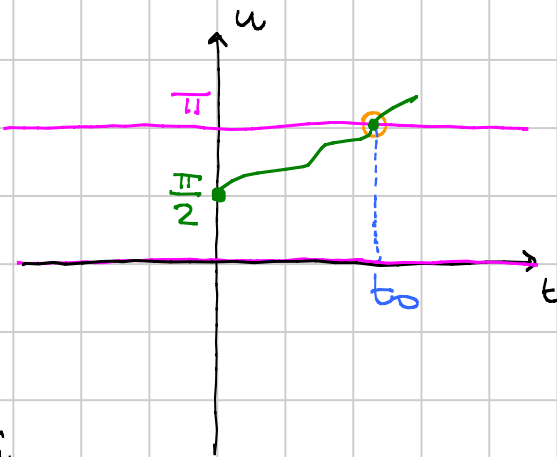
Fatto 1 Se il dato iniziale fosse $u(0) = 0$, allora la soluzione sarebbe $u(t) \equiv 0$. Se il dato iniziale fosse $u(0) = \pi$, allora la soluzione sarebbe $u(t) \equiv \pi$.

Più in generale, tutte le funzioni costanti del tipo $u(t) \equiv k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$, sono soluzioni dell'equazione.

Fatto 2 La soluzione che parte da $u(0) = \frac{\pi}{2}$, può arrivare a valore 0 oppure π ?

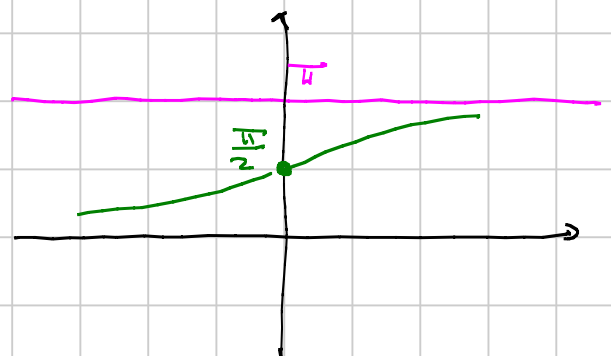
NO!! Se la soluzione arrivasse a π per un certo t_0 , allora il problema di Cauchy con condizioni iniziali $u(t_0) = \pi$ avrebbe almeno 2 soluzioni, il che va contro il teorema di unicità.

Di conseguenza: $0 < u(t) < \pi$ per ogni t per cui la soluzione esiste.



Fatto 3 Poiché $0 < u < \frac{\pi}{2}$, abbiamo che $u'(t) = \sin u(t) > 0$ per ogni t per cui la soluzione esiste, quindi la soluzione è strettamente crescente.

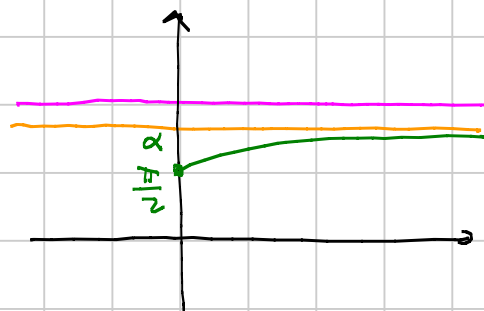
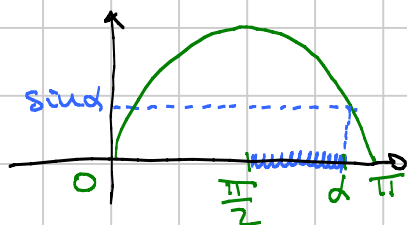
Fatto 4 La soluzione non può avere blow-up, né break-down (sin u è definito ovunque).
Dunque ha esistenza globale.



Fatto 5 L'idea è che $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) = \pi$, $\lim_{t \rightarrow -\infty} u(t) = 0$

Se non tendesse a π (per $t \rightarrow +\infty$), avremmo che esiste un valore $\alpha \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ tale che $\frac{\pi}{2} \leq u(t) \leq \alpha$ per ogni $t \geq 0$

Ma allora $u' = \sin u \geq \sin \alpha > 0$,



Ma allora $u(t) = u(0) + \int_0^t u'(s) ds \geq u(0) + \sin \alpha t \rightarrow +\infty$
che è assurdo

Brutalmente: se $u' \geq \sin \alpha > 0$, allora u cresce più di una retta con coeff. angolare $\sin \alpha$ positivo, dunque u deve tendere a $+\infty$.

Analogamente si dimostra che $\lim_{t \rightarrow -\infty} u(t) = 0$.

— 0 — 0 —