

Esempio 1 Consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' - 2u = \arctan t \\ u(0) = \alpha \end{cases}$$

I coeff. non hanno problemi, quindi c'è esistenza globale per $t \geq 0$ e $t \leq 0$.

Domanda: $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t)$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

L'equazione è lineare a coeff. costanti non omogenea. Eq. omogenea associata

$$u' - 2u = 0 \leadsto x - 2 = 0 \leadsto x = 2 \leadsto \text{base: } e^{2t}$$

Sol. gen. eq. omogenea è $u(t) = c e^{2t}$

Devo trovare sol. speciale dell'eq. non omogenea, ma non si riesce esplicitamente.

Vedo l'eq. come del tipo $u' + a(t)u = b(t)$ e provo a risolvere con il fattore integrante. In questo caso $a(t) = -2$, quindi $A(t) = -2t$, quindi fattore integrante $= e^{-2t}$. Moltiplico

$$u' e^{-2t} - 2u e^{-2t} = e^{-2t} \cdot \arctan t$$

$$[u e^{-2t}]'$$

Faccendo la primitiva: $u e^{-2t} = \int e^{-2t} \cdot \arctan t \, dt + c$, da cui

$$u(t) = \underbrace{e^{+2t} \int e^{-2t} \cdot \arctan t \, dt}_{\substack{\text{soluzione speciale} \\ \text{dell'eq. non omog.}}} + \underbrace{c e^{2t}}_{\substack{\text{sol. gen. omogenea}}}$$

Problema Non si riesce a trovare una primitiva di $e^{-2t} \cdot \arctan t$ espressa usando solo funzioni elementari e/o operazioni algebriche (stesso discorso vale, ad esempio, per e^{t^2}). Questo non vuol dire che non esiste $F(t)$ tale che $F'(t) = e^{-2t} \cdot \arctan t$. Una tale funzione esiste, ed è per esempio

$$F(t) = \int_0^t e^{-2s} \cdot \arctan s \, ds$$

Conseguenza: possiamo scrivere la soluzione $u(t)$ dell'eq. diff. come

$$u(t) = e^{2t} F(t) + c e^{2t},$$

dove $F(t)$ è la funzione definita dall'integrale di sopra,

Determino c imponendo $u(0) = \alpha$. Allora

$$\alpha = u(0) = F(\underset{0}{0}) + c = c, \text{ quindi } c = \alpha$$

dunque la soluzione del problema di Cauchy è

$$u(t) = e^{2t} F(t) + \alpha e^{2t} = e^{2t} (F(t) + \alpha)$$

Devo fare $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t)$. Per farlo occorre capire $\lim_{t \rightarrow +\infty} F(t)$. Diventa

$$\int_0^{+\infty} e^{-2s} \cdot \arctan s \, ds$$

Questo integrale improprio ha unico problema a $+\infty$. Vuol dire

$$e^{-2s} \cdot \arctan s \leq e^{-2s} \frac{\pi}{2} \quad \forall s \geq 0$$

Ora $\int_0^{+\infty} e^{-2s} \, ds$ converge (si dimostra con la definizione), dunque

anche $\int_0^{+\infty} e^{-2s} \cdot \arctan s \, ds$ converge ad un certo valore $I \in \mathbb{R}$. Quindi

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \underbrace{e^{2t}}_{+\infty} \{ \underbrace{F(t)}_I + \alpha \} = \begin{cases} +\infty & \text{se } I + \alpha > 0, \text{ cioè } \alpha > -I \\ -\infty & \text{se } I + \alpha < 0, \text{ cioè } \alpha < -I \end{cases}$$

Classico esempio di VALORE SOGLIA: sopra $-I$ la soluzione va a $+\infty$, sotto $-I$ la soluzione va a $-\infty$,

Cosa succede se $\alpha = -I$? Il limite è una forma indeterminata...

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{F(t) + \alpha}{e^{-2t}} = \left[\frac{0}{0} : \text{H\ddot{o}p} \right] = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{F'(t)}{-2e^{-2t}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{e^{-2t}} \cdot \arctan t}{-2 \cancel{e^{-2t}}} = -\frac{\pi}{4}$$

Dunque per $\alpha = -I$ si ha $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) = -\frac{\pi}{4}$.

Esempio 2 Consideriamo l'equazione differenziale $u'' + 25u = \sin(\alpha t)$,
dove $\alpha \in \mathbb{R}$ è un parametro.

Domanda: per quali valori di α si ha che tutte le soluzioni
del problema sono funzioni limitate (esistono globalmente
perché i coeff. non hanno problemi).

Eq. omogenea associata: $u'' + 25u = 0 \leadsto x^2 + 25 = 0 \leadsto x = \pm 5i$
complesse coniugate $\leadsto$ base: $\cos(5t)$, $\sin(5t)$.

Sol. gen. eq. omogenea: $u(t) = a \cos(5t) + b \sin(5t)$. Questa cosa,
una volta fissati a e b , è limitata perché lo sono $\sin$ e $\cos$.

Se ne una sol. dell'eq. non omogenea, la sol. si può cercare del tipo
 $u(t) = \lambda \cos(\alpha t) + \mu \sin(\alpha t)$. Indipendentemente da chi scegliamo
 λ e μ , il contributo di questa parte sarà limitato. Quindi la sol.
gen. dell'eq. non omogenea sarà una cosa del tipo

$$u(t) = \underbrace{\lambda \cos(\alpha t) + \mu \sin(\alpha t)}_{\text{dipendono da } \alpha} + \underbrace{a \cos(5t) + b \sin(5t)}_{\text{dipendono dalle cond. iniziali}}$$

Quindi la sol. gen. è sempre limitata --, NON PROPRIO --.

Infatti il tentativo funziona $\Leftrightarrow \alpha \neq 5$. Se $\alpha = 5$ si ha che $\sin(5t)$
è già soluzione dell'omogenea, ed il tentativo non va. In questo caso
il tentativo è $u(t) = t \{ \lambda \cos(5t) + \mu \sin(5t) \}$. Ora calcoliamo λ e μ

$$u'(t) = \lambda \cos(5t) + \mu \sin(5t) + 5t \{ -\lambda \sin(5t) + \mu \cos(5t) \}$$

$$u''(t) = -5\lambda \sin(5t) + 5\mu \cos(5t) - 5\lambda \sin(5t) + 5\mu \cos(5t) + \\ + 25t \{ -\lambda \cos(5t) - \mu \sin(5t) \}$$

Sostituendo nell'eq.

$$u''(t) + 25u(t) = -10\lambda \sin(5t) + 10\mu \cos(5t) = \sin(5t) \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{10}, \mu = 0$$

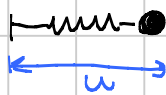
Quindi per $\alpha = 5$ la sol. gen. della non omog. è

$$u(t) = -\frac{1}{10} t \sin(5t) + a \sin(5t) + b \cos(5t)$$

cos: corretto dopo video

e questa soluzione NON è limitata chiunque siano a e b .

Modellino



$$F = ma$$

$$-ku = u''$$

L'equazione di una molla è del tipo $u'' = -ku$, cioè $u'' + ku = 0$

$$u'' + ku = \underbrace{f(t)}_{\text{"spinta"}}$$

Morale: se si vuole ampliare le oscillazioni, bisogna spingere con un periodo legato al periodo proprio della molla.