

Equazioni differenziali lineari del primo ordine

$$u' + a(t)u = b(t)$$

Per queste equazioni c'è una formula risolutiva che funziona a patto di saper fare alcune primitive. Ci sono 2 modi per arrivare alla formula

- fattore integrante
- variazioni delle costanti

Fattore integrante Sia $A(t)$ una primitiva qualunque di $a(t)$, cioè

$$A'(t) = a(t)$$

Moltiplico a dx e so per $e^{A(t)}$, che si chiama fattore integrante

$$u'(t)e^{A(t)} + a(t)e^{A(t)}u(t) = b(t)e^{A(t)}$$

I due termini a sinistra sono la derivata del prodotto $u(t)e^{A(t)}$

$$\left[u(t)e^{A(t)} \right]' = b(t)e^{A(t)}$$

Facendo la primitiva otteniamo che

$$u(t)e^{A(t)} = \int b(t)e^{A(t)} dt + \textcircled{C}$$

↑
parametro libero

da cui

$$u(t) = e^{-A(t)} \int b(t)e^{A(t)} dt + ce^{-A(t)}$$

Formula risolutiva per lineari del primo ordine

Serve: saper fare la primitiva di $a(t)$
 " " " " " $b(t)e^{A(t)}$

Esempio 1

$$u' + 2tu = t^3$$

(non rientra tra quelle a variabili separabili o coeff. costanti)

Oss.: se invece di t^3 c'era solo t allora era anche a var. separabili

La vediamo come lineare di ordine 1 con $a(t) = 2t$ e $b(t) = t^3$.

Allora $A(t) = t^2$, dunque il fattore integrante è $e^{A(t)} = e^{t^2}$.

Moltiplico a dx e sx per il fattore integrante:

$$\underbrace{u' e^{t^2} + 2tu e^{t^2}} = t^3 e^{t^2}$$

$$[u e^{t^2}]' = t^3 e^{t^2}$$

Integrando nuovamente: $u e^{t^2} = \int t^3 e^{t^2} dt$

$$\int t^3 e^{t^2} dt = \int \underbrace{t^2}_F \cdot \underbrace{t e^{t^2}}_g dt = \underbrace{t^2}_F \cdot \underbrace{\frac{1}{2} e^{t^2}}_G - \int \underbrace{2t}_F \cdot \underbrace{\frac{1}{2} e^{t^2}}_G dt$$

$$= \frac{1}{2} t^2 e^{t^2} - \int t e^{t^2} dt = \frac{1}{2} t^2 e^{t^2} - \frac{1}{2} e^{t^2}$$

Abbiamo così ottenuto che
e semplificando

$$u(t) e^{t^2} = \frac{1}{2} t^2 e^{t^2} - \frac{1}{2} e^{t^2} + \textcircled{c} \quad \text{parametro}$$

$$u(t) = \frac{1}{2} t^2 - \frac{1}{2} + c e^{-t^2}$$

Soluzione generale dell'equazione

Variazione delle costanti

Devo risolvere $u' + a(t)u = b(t)$. Inizio a risolvere l'eq. omogenea corrispondente $u' + a(t)u = 0$. Questa è a variabili separabili: $u' = -a(t)u$

$$\frac{du}{dt} = -a(t)u \quad ; \quad \frac{du}{u} = -a(t)dt \quad ; \quad \int \frac{du}{u} = -\int a(t)dt$$

$$\log|u| = -A(t) \quad ; \quad |u| = e^{-A(t)+c}$$

$$\Rightarrow u(t) = c e^{-A(t)}$$

soluzione generale dell'eq. omogenea

Ora serve una soluzione speciale dell'eq. non omogenea e la cerco mediante variazione delle costanti, cioè del tipo

$$u(t) = \underbrace{c(t)}_{\substack{\uparrow \text{costante che ora varia}}} e^{-A(t)}$$

Calcolo

$$u'(t) = c'(t) e^{-A(t)} - c(t) a(t) e^{-A(t)}$$

Sostituisco u' nell'equazione e trovo che

$$\underbrace{c'(t) e^{-A(t)}}_{u'(t)} - \underbrace{c(t) a(t) e^{-A(t)}}_{+ a(t) u(t)} + \underbrace{a(t) c(t) e^{-A(t)}}_{+ a(t) u(t)} = b(t)$$

Otengo così che

$$c'(t) e^{-A(t)} = b(t) \Rightarrow c'(t) = b(t) e^{A(t)}$$

quindi

$$c(t) = \int b(t) e^{A(t)} dt.$$

$$\text{Dunque la soluzione speciale è } u(t) = c(t) e^{-A(t)} = e^{-A(t)} \int b(t) e^{A(t)} dt$$

In conclusione la soluzione generale dell'equazione non omogenea è

$$u(t) = \underbrace{e^{-A(t)} \int b(t) e^{A(t)} dt}_{\substack{\text{soluzione speciale eq.} \\ \text{non omogenea}}} + \underbrace{c e^{-A(t)}}_{\substack{\text{sol. generale} \\ \text{dell'eq. omogenea}}}$$

Oss. Ovviamente è la stessa formula ottenuta prima!

Esempio 2

$$u' + \frac{u}{t} = \cos t$$

$$u(1) = \alpha$$

Lineare del 1° ordine con $a(t) = \frac{1}{t}$ e $b(t) = \cos t$

Allora

$$A(t) = \log|t|, \text{ quindi } e^{A(t)} = e^{\log|t|} = |t|$$

Oss. La soluzione di un'eq. lineare esiste fino a quando i coeff. non hanno problemi. Nel vostro caso quindi l'intervallo massimale di

esistenza sarà $(0, +\infty)$ perché il dato iniziale è per $t=1$ e l'unico problema è per $t=0$.

Quindi nell'intervallo massimale di esistenza $t>0$, quindi il fattore integrante è $|t| = t$.

Ora moltiplico a dx e so per t ;

$$t u' + u = t \cdot \cos t \\ = [tu]'$$

da cui

$$tu = \int \underset{F}{t} \underset{g}{\cos t} dt = \underset{F}{t} \underset{G}{\sin t} - \int \underset{f}{1} \underset{G}{\sin t} dt = t \sin t + \cos t + c$$

parametro $\uparrow$

Dividendo

$u(t) = \sin t + \frac{\cos t}{t} + \frac{c}{t}$

Soluzione generale equazione non omogenea

Oss. Questo ci dice che $\frac{c}{t}$ è la soluzione generale dell'eq. omogenea associata $u' + \frac{u}{t} = 0$.

Facciamo finita che la condizione iniziale sia $u(\pi) = \alpha$. Per determinare c basta sostituire:

$$\alpha = u(\pi) = -\frac{1}{\pi} + \frac{c}{\pi}, \quad \pi\alpha = -1 + c, \quad c = \pi\alpha + 1$$

da cui la soluzione

$$u(t) = \sin t + \frac{\cos t}{t} + \frac{\pi\alpha + 1}{t}$$

Calcolare $\lim_{t \rightarrow 0^+} u(t)$ in funzione del parametro α

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \underbrace{\sin t}_{\downarrow 0} + \frac{\cos t + \pi\alpha + 1}{t}$$

$2 + \pi\alpha$

- Se $2 + \pi\alpha > 0$, allora $\lim = +\infty$
- Se $2 + \pi\alpha < 0$, allora $\lim = -\infty$
- Se $2 + \pi\alpha = 0$, allora... $\lim = 0$.

$$\frac{\cos t + \pi\alpha + 1}{t} = \frac{\cos t - 1 + \pi\alpha + 2}{t} = \frac{\cos t - 1}{t \cdot t} \cdot t \rightarrow 0$$