

Metodo di variazione delle costanti Serve per trovare una soluzione di una equazione diff. lineare non omogenea (alternativo a provare ad indovinare)

Esempio  $u'' - 3u' + 2u = t$

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \leadsto (x-1)(x-2) = 0 \leadsto x=1, x=2 \leadsto e^t, e^{2t}$$

Cerco una soluzione dell'eq. non omogenea  $u(t) = at + b$ , da cui

$$u'(t) = a, \quad u''(t) = 0, \text{ e sostituendo:}$$

$$0 - 3a + 2at + 2b = t$$

$$u'' - 3u' + 2u = t$$

$$\begin{cases} 2a = 1 & a = \frac{1}{2} \\ -3a + 2b = 0 & 2b = 3a = \frac{3}{2} \Rightarrow b = \frac{3}{4} \end{cases} \quad \text{Sol. speciale: } \bar{u}(t) = \frac{1}{2}t + \frac{3}{4}$$

Sol. generale dell'equazione non omogenea:  $u(t) = \underbrace{\frac{1}{2}t + \frac{3}{4}}_{\text{sd. speciale}} + \underbrace{ae^t + be^{2t}}_{\text{sd. gen. eq. omog.}}$

Date opportune condizioni iniziali, posso trovare  $a$  e  $b$ .

Per esempio, se fosse  $u(0) = 3, \quad u'(0) = 5$ , allora si impone

$$\underbrace{\frac{3}{4} + a + b}_{u(0)} = 3 \quad u'(t) = \frac{1}{2} + ae^t + 2be^{2t} \quad \underbrace{\frac{1}{2} + a + 2b}_{u'(0)} = 5$$

Risolvendo il sistema lineare si trovano  $a$  e  $b$ .

Risolviamo lo stesso esercizio con il metodo di variazione delle costanti.

La soluzione generale dell'equazione omogenea è

$$u(t) = ae^t + be^{2t}$$

Ora cerco una soluzione dell'equazione non omogenea del tipo

$$u(t) = a(t)e^t + b(t)e^{2t}$$

dove  $a(t)$  e  $b(t)$  sono funzioni incognite da trovare. Calcolo le derivate e sostituisco nell'equazione,



$$\begin{cases} a'(t)e^t + b'(t)e^{2t} = 0 & 2^a - 1^a; \quad b'(t)e^{2t} = t \Rightarrow b'(t) = te^{-2t} \\ a'(t)e^t + 2b'(t)e^{2t} = t & 2 \cdot 1^a - 2^a: \quad a'(t)e^t = -t \Rightarrow a'(t) = -te^{-t} \end{cases}$$

Non resta che trovare  $a(t)$  e  $b(t)$  facendo le primitive:

$$a(t) = - \int t e^{-t} dt = \underset{F}{t} \underset{g}{e^{-t}} - \int \underset{F}{1} \cdot \underset{g}{e^{-t}} dt = te^{-t} + e^{-t}$$

$$b(t) = \int t e^{-2t} dt = \underset{F}{t} \underset{g}{(-\frac{1}{2}e^{-2t})} - \int \underset{F}{1} \cdot \underset{g}{(-\frac{1}{2}e^{-2t})} dt$$

$$= -\frac{1}{2} t e^{-2t} + \frac{1}{2} \int e^{-2t} dt = -\frac{1}{2} t e^{-2t} - \frac{1}{4} e^{-2t}$$

Trovati  $a(t)$  e  $b(t)$  basta sostituire nella formula per  $u(t)$ :

$$\begin{aligned} u(t) &= a(t)e^t + b(t)e^{2t} = (te^{-t} + e^{-t})e^t + \left(-\frac{1}{2}te^{-2t} - \frac{1}{4}e^{-2t}\right)e^{2t} \\ &= t + 1 - \frac{1}{2}t - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}t + \frac{3}{4}, \end{aligned}$$

che è esattamente la soluzione speciale trovata prima!

Oss. A volte la soluzione speciale può venire "apparentemente" diversa.

Ad esempio avremmo potuto trovare  $u(t) = \frac{1}{2}t + \frac{3}{4} + 6e^t$ ,  
ma in tal caso il termine  $6e^t$  sarebbe poi stato assorbito dalla  
sol. gen. dell'eq. omogenea. Morale: la soluzione generale è  
sempre la stessa anche a partire da soluzioni speciali "diverse".

Schema del metodo:

- cercare sol. speciale facendo variare le costanti
- calcolare  $u'$  e imporre annullamento termini con  $a'$  e  $b'$ : 1ª equazione
- calcolare  $u''$  e sostituire nell'eq. iniziale: 2ª equazione
- 1ª + 2ª equazione  $\leadsto$  calcolo di  $a'$  e  $b'$   $\leadsto$   $a$  e  $b$  con primitiva.

— o — o —

Esempio  $u'' - 5u' + 6u = te^{4t}$

$x^2 - 5x + 6 = 0$ ,  $(x-2)(x-3) = 0$ ,  $x=2$  e  $x=3$ , base:  $e^{2t}$ ,  $e^{3t}$

Variatione delle costanti: cerco una soluzione del tipo

$$u(t) = a(t)e^{2t} + b(t)e^{3t}$$

In alternativa: facciamo un tentativo del tipo  $u(t) = (at+b)e^{4t}$

$$u'(t) = ae^{4t} + 4(at+b)e^{4t}$$

$$u''(t) = 4ae^{4t} + 4ae^{4t} + 16(at+b)e^{4t}$$

$$\underbrace{8ae^{4t} + 16ate^{4t} + 16be^{4t}}_{u''} - \underbrace{5ae^{4t} - 20ate^{4t} - 20be^{4t}}_{-5u'} + \underbrace{6ate^{4t} + 6be^{4t}}_{+6u} = te^{4t}$$

$$\begin{cases} 2a = 1 & \text{coeff. di } te^{4t} \\ 3a + 2b = 0 & \text{coeff. di } e^{4t} \end{cases} \leadsto \text{si risolve}$$

Oss. Se invece di  $e^{4t}$  ci fosse stato  $e^{3t}$ , bisognava aggiungere una  $t$  davanti al tentativo.

— o — o —