

Esponenziale complesso Dato $z = a+bi \in \mathbb{C}$, si definisce

$$e^z = e^{a+bi} = e^a \cdot e^{bi} = e^a (\cos b + i \sin b)$$

Esempio $e^i = \cos 1 + i \sin 1$ (1 è pensato come radiante)
 $e^{3+2i} = e^3 \cdot e^{2i} = e^3 (\cos 2 + i \sin 2)$

"Logaritmo" di un numero complesso Dato $a \in \mathbb{C}$, trovare il suo "logaritmo" vuol dire trovare le soluzioni dell'equazione $e^z = a$

Fatto generale, L'equazione $e^z = a$ ha

- nessuna soluzione se $a=0$
- infinite soluzioni se $a \neq 0$.

Esempio 1 Risolvere $e^z = -2$.

Scrivo -2 in forma esponenziale e z in forma cartesiana.

$$z = a+bi \quad -2 = 2e^{\pi i} \quad \text{Uguagliando:}$$

$$e^z = e^{a+bi} = e^a \cdot e^{bi} = 2e^{\pi i}$$

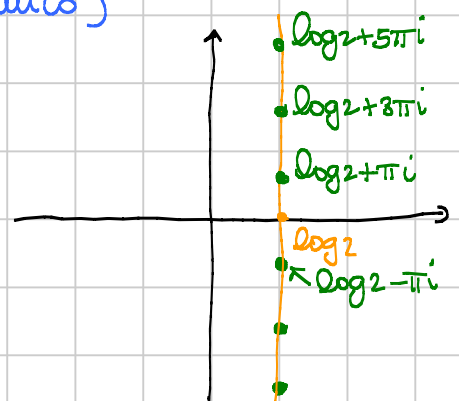
da cui (stesso ρ e θ che differiscono di multipli di 2π)

$$e^a = 2 \quad b = \pi + 2k\pi$$

$a = \log 2$ (occhio: qui si tratta del logaritmo reale di un numero reale positivo, quindi esiste ed è unico)

Quindi gli z che vanno bene sono tutti i numeri complessi del tipo

$$z = \underbrace{\log 2}_a + \underbrace{(2k+1)\pi i}_b$$



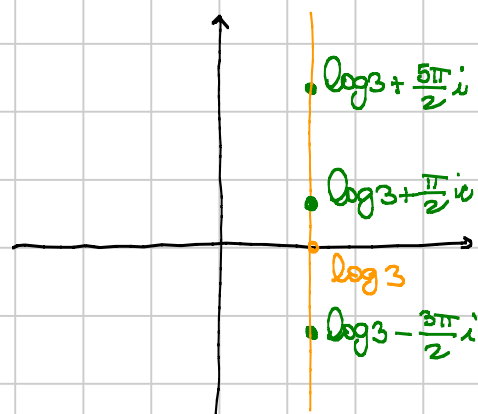
Esempio 2 $e^z = 3i$ $z = a+bi$ $3i = 3e^{\frac{\pi}{2}i}$, quindi

$$e^z = e^{a+bi} = \boxed{e^a} \cdot \boxed{e^{bi}} = \boxed{3} e^{\frac{\pi}{2}i} \quad \text{da cui}$$

$$e^a = 3, \quad b = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$a = \log 3, \quad b = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

Quindi le soluzioni sono $z = \log 3 + \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)i$



Sorpresa In $\mathbb{C}$ la funzione e^z è periodica e il suo periodo è $2\pi i$.

Infatti

$$f(z + 2\pi i) = e^{z+2\pi i} = e^z \cdot e^{2\pi i} = e^z \cdot 1 = e^z = f(z)$$

Seno e coseno iperbolico di un numero complesso

$$\cosh(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

$$\sinh(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

Esempio Calcolare $\cosh(i)$. Dalla formula

$$\begin{aligned} \cosh(i) &= \frac{1}{2} (e^i + e^{-i}) = \frac{1}{2} \left(\underbrace{\cos 1 + i \sin 1}_{e^i} + \underbrace{\cos(-1) + i \sin(-1)}_{e^{-i}} \right) \\ &= \frac{1}{2} (\cos 1 + i \cancel{\sin 1} + \cos 1 - i \cancel{\sin 1}) \\ &= \cos 1 \end{aligned}$$

Più in generale: $\cosh(\alpha i) = \cos \alpha$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \sinh(\alpha i) &= \frac{1}{2} (e^{\alpha i} - e^{-\alpha i}) = \frac{1}{2} (\cos \alpha + i \sin \alpha - \cos(-\alpha) - i \sin(-\alpha)) \\ &= \frac{1}{2} (\cancel{\cos \alpha} + i \sin \alpha - \cancel{\cos \alpha} + i \sin \alpha) \\ &= i \sin \alpha \end{aligned}$$

Oss. $\sinh(z)$ e $\cosh(z)$ sono funzioni periodiche di periodo minimo $2\pi i$,

Seno e coseno di un numero complesso

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

$$e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$$

Sommando: $2\cos(\theta) = e^{i\theta} + e^{-i\theta}$ da cui $\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$

Sottraendo: $2i\sin\theta = e^{i\theta} - e^{-i\theta}$ da cui $\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

Queste formule le abbiamo ricavate per θ reale. In generale per estensione si pone, per un qualunque $z \in \mathbb{C}$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

Esempi $\sin(i) = \frac{e^{i \cdot i} - e^{-i \cdot i}}{2i} = \frac{e^{-1} - e^1}{2i}$

Ora $\frac{1}{i} = -i$, quindi $\sin(i) = -i \frac{e^{-1} - e^1}{2} = i \frac{e^1 - e^{-1}}{2} = i \cdot \sinh 1$

In generale $\sin(i\alpha) = i \sinh \alpha$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.

Esercizio Risolvere l'equazione $\sin z = 2$, cioè cerco tutti i numeri complessi z tali che $\sin z = 2$.

1° passo: scrivo $\sin z$ usando l'esponenziale

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 2, \text{ da cui } e^{iz} - e^{-iz} = 4i$$

Pongo $w = e^{iz}$, così che $e^{-iz} = \frac{1}{w}$. Si ottiene

$$w - \frac{1}{w} = 4i, \text{ da cui } w^2 - 1 = 4iw, \quad w^2 - 4iw - 1 = 0$$

Risolvendo l'eq. di 2° grado $w_{1,2} = 2i \pm \sqrt{-4+1} = 2i \pm \sqrt{-3}$

Quindi $w_{1,2} = 2i \pm \sqrt{3}i = (2 \pm \sqrt{3})i$

Tornando in z dobbiamo risolvere $e^z = w$, cioè

$$e^z = (2 + \sqrt{3})i$$

$$e^z = (2 - \sqrt{3})i$$

In entrambi i casi scrivo $z = a + bi$, quindi $e^z = e^a \cdot e^{bi}$

$$e^a \cdot e^{bi} = (2 + \sqrt{3}) e^{\frac{\pi}{2}i}$$

$$e^a \cdot e^{bi} = (2 - \sqrt{3}) e^{\frac{\pi}{2}i}$$

$$a = \log(2 + \sqrt{3})$$

$$a = \log(2 - \sqrt{3})$$

$$b = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$b = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

In realtà doverò risolvere $e^{iz} = w$, ma cambia poco.

Scrivo $z = a + bi$, da cui

$$e^{iz} = e^{i(a+bi)} = e^{ia-b} = e^{-b} \cdot e^{ia}$$

da cui

$$e^{-b} \cdot e^{ia} = (2 + \sqrt{3}) e^{\frac{\pi}{2}i}$$

$$e^{-b} \cdot e^{ia} = (2 - \sqrt{3}) e^{\frac{\pi}{2}i}$$

$$e^{-b} = (2 + \sqrt{3}) ; b = -\log(2 + \sqrt{3})$$

$$a = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$e^{-b} = (2 - \sqrt{3}) ; b = -\log(2 - \sqrt{3})$$

$$a = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

Oss. Le soluzioni devono essere periodiche di periodo reale, quindi rispetto alla parte reale.

Infatti il $2k\pi$ lo troviamo in a .

