

Fattorizzazione di polinomi

Fatto generale : ogni polinomio $p(x)$ a coeff. complessi di grado n si scrive come prodotto di n polinomi a coeff. complessi di grado 1.

Meglio : se $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, allora

$$p(x) = a_n (x - \lambda_1) \cdot (x - \lambda_2) \cdot \dots \cdot (x - \lambda_n)$$

dove $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sono le radici (complesse) di $p(x)$, ciascuna ripetuta a seconda della sua molteplicità.

Il fatto generale segue dal teorema fondamentale dell'algebra : ogni polinomio di grado n a coeff. complessi ha esattamente n radici, se contate con molteplicità.

Parte banale : un polinomio di grado n ha al massimo n radici. Infatti : una volta trovate n radici posso scomporre $p(x)$ come prodotto di n fattori di 1° grado. Ogni altra radice dovrebbe annullare uno dei fattori, quindi coincidere con una delle precedenti.

Parte difficile : un polinomio $p(x)$ di grado ≥ 1 ha almeno una radice complessa. Osservazione : basta almeno una radice per trovare esattamente n . Infatti : prendo $p(x)$ di grado n . Questo avrà una radice λ_1 . Per Ruffini posso dividere :

$$p(x) = (x - \lambda_1) q(x), \text{ grado } n-1$$

Ora $q(x)$ avrà a sua volta una radice λ_2 , e così via.

Fattorizzazione sui reali D'ora in poi $p(x)$ è a coeff. reali.

Fatto 1 Se α è una radice complessa di $p(x)$, allora anche $\bar{\alpha}$ è radice di $p(x)$.

Fatto 0, Se $z \in \mathbb{C}$, allora $p(\bar{z}) = \overline{p(z)}$ ($p(x)$ a coeff. reali)

Dim. $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$
 $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$

$$\begin{aligned}\overline{p(z)} &= \overline{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0} \\ &= \overline{a_n} \overline{z^n} + \overline{a_{n-1}} \overline{z^{n-1}} + \dots + \overline{a_1} \overline{z} + \overline{a_0} \\ &= \overline{a_n} \bar{z}^n + \overline{a_{n-1}} \bar{z}^{n-1} + \dots + \overline{a_1} \bar{z} + \overline{a_0} \\ &= a_n \bar{z}^n + a_{n-1} \bar{z}^{n-1} + \dots + a_1 \bar{z} + a_0 \\ &= p(\bar{z})\end{aligned}$$

Fatto 0 $\Rightarrow$ Fatto 1: Sia α una radice, cioè $p(\alpha) = 0$. Allora $p(\bar{\alpha}) = \overline{p(\alpha)} = \overline{0} = 0$, quindi anche $\bar{\alpha}$ è una radice.

Fatto 2 Se $\alpha \in \mathbb{C}$ è una radice di $p(x)$ (a coeff. reali) di molteplicità k , allora anche $\bar{\alpha}$ ha molteplicità k .

Supponendo di aver dimostrato il fatto 2, la fattorizzazione di $p(x)$ si presenta nella forma

$$p(x) = \underbrace{(x-\lambda_1) \dots (x-\lambda_r)}_{\text{radici reali}} \underbrace{\overbrace{(x-\alpha_1)(x-\bar{\alpha}_1)}^{\text{coeff.}} \dots \overbrace{(x-\alpha_m)(x-\bar{\alpha}_m)}^{\text{realtà}}}_{\text{coppie di radici complesse coniugate}}$$

Sia $\alpha = a+ib$. Calcolo $(x-\alpha)(x-\bar{\alpha}) = x^2 - \alpha x - \bar{\alpha} x + \alpha \bar{\alpha}$
 $= x^2 - (\alpha + \bar{\alpha})x + \alpha \bar{\alpha}$
 $= x^2 - 2ax + (a^2+b^2)$

quindi il prodotto ha coefficienti reali.

Fatto generale: ogni polinomio $p(x)$ a coeff. reali si scrive come prodotto di polinomi a coeff. reali di grado 1 e 2.

I fattori di 1° grado corrispondono alle radici reali, i fattori di 2° grado corrispondono ad una coppia di radici complesse coniugate.

Dim fatto 2. Sia α una radice di $p(x)$. Allora anche $\bar{\alpha}$ è una radice. Ma allora

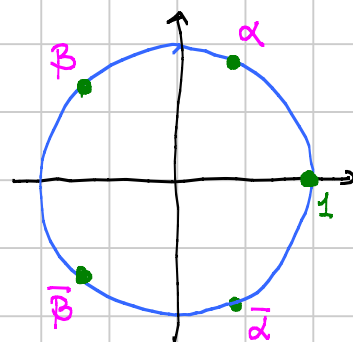
$$p(x) = \underbrace{(x-\alpha)(x-\bar{\alpha})}_{\text{coeff. reali}} \cdot \underbrace{q(x)}_{\text{coeff. reali}}$$

Se ora α è radice di $q(x)$, allora anche $\bar{\alpha}$ lo sarà, e viceversa.

Questo mostra che hanno la stessa molteplicità.

Esempio $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$. Osservo che $x^5 - 1 = (x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$

Ora $x^5 - 1$ ha come radici le 5 radici quinte di 1, che si trovano facilmente. Di queste 5, $x=1$ è radice del fattore $x-1$, le altre 4 sono radici di $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$,



Quindi sui complessi:

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = \underbrace{(x-\alpha)(x-\bar{\alpha})}_{\text{coeff. reali}} \underbrace{(x-\beta)(x-\bar{\beta})}_{\text{coeff. reali}}$$

Con semplici calcoli si vede che le radici hanno $\rho=1$ e

$$\theta = \underbrace{\frac{2\pi}{5}}_{\alpha}, \underbrace{\frac{4\pi}{5}}_{\beta}, \underbrace{\frac{6\pi}{5}}_{\bar{\beta}}, \underbrace{\frac{8\pi}{5}}_{\bar{\alpha}}$$

Ricordiamo che $(x-\alpha)(x-\bar{\alpha}) = x^2 - 2\operatorname{Re} \alpha x + \underbrace{|\alpha|^2}_1$ (vedi sopra)

Ora $\operatorname{Re}(\alpha) = \operatorname{Re}(\bar{\alpha}) = \cos \frac{2\pi}{5}$, $\operatorname{Re}(\beta) = \operatorname{Re}(\bar{\beta}) = \cos \frac{4\pi}{5}$, quindi

$$(x-\alpha)(x-\bar{\alpha}) = x^2 - \left(2\cos \frac{2\pi}{5}\right)x + 1 \quad (x-\beta)(x-\bar{\beta}) = x^2 - \left(2\cos \frac{4\pi}{5}\right)x + 1$$

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = \left[x^2 - 2\cos \frac{2\pi}{5} x + 1 \right] \cdot \left[x^2 - 2\cos \frac{4\pi}{5} x + 1 \right]$$

Esempio 2 $x^4 + 1$ Trovare la fattorizzazione.

A suo tempo: $x^4 + 1 = x^4 + 2x^2 + 1 - 2x^2 = (x^2 + 1)^2 - (\sqrt{2}x)^2 = \dots$

Passando ai complessi: le radici complesse di $x^4 + 1$ sono le radici quarte di -1 , che si trovano facilmente.

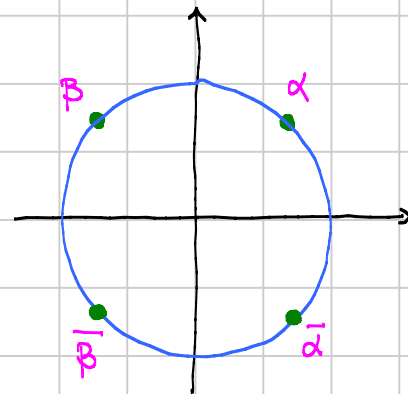
Brevemente: -1 ha $\rho = 1$ e $\theta = \pi$

Quindi le radici quarte avranno $\rho = 1$ e

$$\theta = \frac{\pi}{4} + \text{sfasamenti di } \frac{\pi}{2}$$

$$\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i$$

$$\beta = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i$$



Fattorizzando:

$$x^4 + 1 = \underbrace{(x - \alpha)(x - \bar{\alpha})}_{x^2 - 2\operatorname{Re} \alpha \cdot x + |\alpha|^2} \underbrace{(x - \beta)(x - \bar{\beta})}_{x^2 - 2\operatorname{Re} \beta \cdot x + |\beta|^2}$$
$$(x^2 - \sqrt{2}x + 1) \cdot (x^2 + \sqrt{2}x + 1)$$