

Fatto generale: avere le radici è equivalente ad avere la fattorizzazione.

Conseguenza Ogni polinomio di grado n è il prodotto di n polinomi di grado 1 (ovviamente a coeff. complessi).

Esempio 1 $x^4 - 16$. Le radici di questo polinomio sono le radici quarte complesse di 16, quindi $2, 2i, -2, -2i$ da cui

$$x^4 - 16 = (x-2)(x-2i)(x+2)(x+2i) \\ (x-\lambda_1)(x-\lambda_2)(x-\lambda_3)(x-\lambda_4)$$

Volevamo sì arrivare direttamente scomponendo:

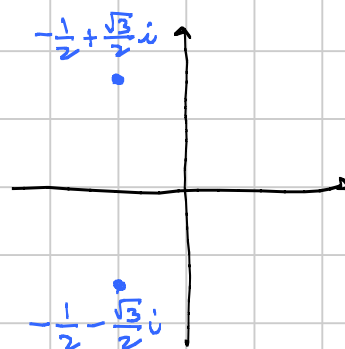
$$x^4 - 16 = (x^2 + 4)(x^2 - 4) = (x+2i)(x-2i)(x+2)(x-2).$$

Esempio 2 $x^2 + x + 1 = 0$ Equazione di 2° grado:

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}, \text{ da cui}$$

$$x^2 + x + 1 = \left(x - \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}\right) \left(x - \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}\right)$$

Le 2 radici sono complesse coniugate.



Esempio 3 $x^4 + x^2 + 1 = 0$ Equazioni biquadratiche

Pongo $x^2 = y$ e ottengo $y^2 + y + 1$ che è l'equazione di prima, da cui

$$y_1 = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} \quad y_2 = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$$

Nella variabile x mi aspetto 4 soluzioni. Di queste, 2 si ottengono facendo la radice quadrata di y_1 e 2 facendo la radice quadrata di y_2 .

Per fare la radice di y_1 , scriviamo $y_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = \underbrace{1}_{\cos \theta} \cdot e^{i \underbrace{\frac{2\pi}{3}}_{\sin \theta}}$

Devo risolvere $z^2 = y_1$, cioè $\rho^2 e^{2i\theta} = 1 \cdot e^{\frac{2\pi}{3}i}$, da cui

$$\begin{cases} \rho^2 = 1 \\ 2\theta = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} \quad \begin{cases} \rho = 1 \\ \theta = \frac{\pi}{3} + k\pi \end{cases}$$

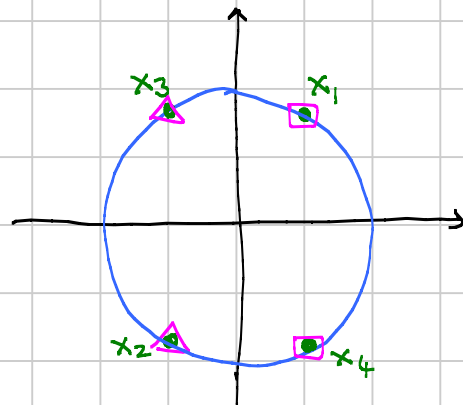
da cui 2 soluzioni $x_1 = 1 \cdot e^{\frac{\pi}{3}i} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $x_2 = 1 \cdot e^{\frac{4\pi}{3}i} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

Fare la radice di y_2 è analogo: $y_2 = 1 \cdot e^{\frac{4\pi}{3}i}$, da cui risolvere $z^2 = y_2$ si riduce a

$$\begin{cases} \rho^2 = 1 \\ 2\theta = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} \quad \begin{cases} \rho = 1 \\ \theta = \frac{2\pi}{3} + k\pi \end{cases}$$

da cui altre 2 soluzioni: $x_3 = 1 \cdot e^{\frac{2\pi}{3}i} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $x_4 = 1 \cdot e^{\frac{5\pi}{3}i} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

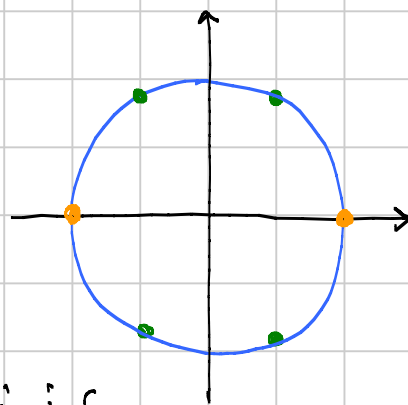
Ho così ottenuto 4 radici $x_{1,2,3,4} = \pm \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$
con 4 possibilità per i segni



Oss. 1 Le radici sono a 2 a 2 coniugate
(fatto generale: se il polinomio ha coeff. reali, allora le radici complesse con $\text{Im} \neq 0$ sono a 2 a 2 coniugate).

Oss. 2 Le radici sono vertici di un rettangolo, ma non di un quadrato (per polinomi generici le radici non formano necessariamente un poligono regolare).

Oss. 3 In questo caso le radici sono 4 vertici di un esagono regolare. Per avere l'esagono devo aggiungere ± 1 , che sono le soluzioni di $x^2 - 1 = 0$, dunque il polinomio



$(x^4 + x^2 + 1)(x^2 - 1)$ ha come radici i 6 vertici dell'esagono
 x_1, x_2, x_3, x_4 radici ± 1

Ora $(x^4+x^2+1)(x^2-1) = x^6-1$ e $x^6-1=0$ ha come soluzioni proprio le 6 radici sesse di 1, che sono 1 e le sue rotate di 60° .

Esempio 4 Trovare le radici del polinomio $x^4+x^3+x^2+x+1=0$
(ad esempio per risolvere $u^{(4)}+u^{(3)}+u^{(2)}+u'+u=0 \dots$)

Se fosse $x^3+x^2+x+1=0$ si risolverebbe raccogliendo:
 $x^2(x+1) + (x+1) = 0$, $(x^2+1)(x+1) = 0 \leadsto x = -1, x = \pm i$.

Con anche x^4 il raccoglimento non funziona. Tuttavia

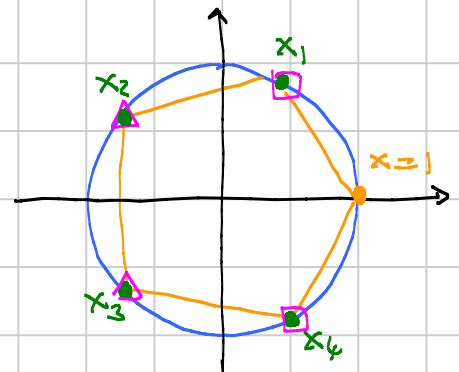
$$(x^4+x^3+x^2+x+1)(x-1) = x^5-1$$

Ora $x^5-1=0$ ha 5 radici, cioè le radici quinte di 1 (facili da trovare). Di queste 5 radici, una annulla il fattore $x-1$ (e si tratta di $x=1$), le altre 4 devono per forza annullare $x^4+x^3+x^2+x+1$

Volendo si trova che

$$x_1 = e^{\frac{2\pi}{5}i} \quad x_2 = e^{\frac{4\pi}{5}i}$$

$$x_3 = e^{\frac{6\pi}{5}i} \quad x_4 = e^{\frac{8\pi}{5}i}$$



Esercizio Scrivere $x^4+x^3+x^2+x+1$ come prodotto di 2 polinomi di 2° grado a coeff. reali (uno avrà come radici x_1 e x_4 , l'altro x_2 e x_3).