

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 100

Titolo nota

07/12/2011

Esempio 1 Calcolare $(\sqrt{3}-i)^{30}$. Dare la risposta in forma cartesiana.

$\sqrt{3}-i \rightsquigarrow$ Forma esponenziale $\rightsquigarrow$ Elevo alla 30 $\rightsquigarrow$ Forma cartesiana

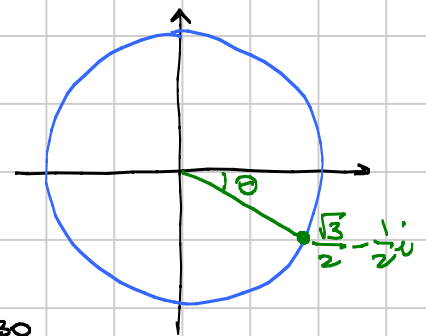
$$\rho = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{3+1} = 2 \quad \text{Per calcolare } \theta \text{ metto in evidenza } \rho$$

$$\sqrt{3}-i = 2 \left(\underbrace{\frac{\sqrt{3}}{2}}_{\cos \theta} - \underbrace{\frac{1}{2}}_{\sin \theta} i \right) \quad \text{Quindi } \cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \sin \theta = -\frac{1}{2} \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{6}$$

In forma esponenziale

$$z = \sqrt{3}-i = \rho e^{i\theta} = 2 \cdot e^{-\frac{\pi}{6}i}$$

$$z^{30} = \left(2 e^{-\frac{\pi}{6}i} \right)^{30} = 2^{30} e^{-5\pi i} = 2^{30} e^{-\pi i} = -2^{30}$$



Se fosse stato z^{2011} avrei dovuto fare

$$z^{2011} = \left(2 e^{-\frac{\pi}{6}i} \right)^{2011} = 2^{2011} e^{-\frac{2011}{6}i\pi}$$

Ora $2010:6 = 335$, quindi $2011 = 6 \cdot 335 + 1$, quindi

$$-\frac{2011}{6}\pi = -\frac{6 \cdot 335 + 1}{6}\pi = \underbrace{-335\pi}_{2k\pi} - \frac{\pi}{6}, \quad \text{quindi}$$

$$\begin{aligned} z^{2011} &= 2^{2011} \cdot e^{-\frac{\pi}{6}i} = 2^{2011} \left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \right) = 2^{2011} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right) \\ &= 2^{2010} (\sqrt{3}-i) \end{aligned}$$

Se fosse stato z^{-2011} , basta fare

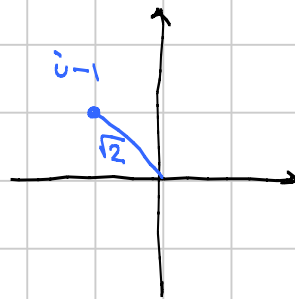
$$\frac{1}{z^{2011}} = \frac{1}{2^{2010} (\sqrt{3}-i)} \cdot \frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}+i} = \frac{\sqrt{3}+i}{2^{2010} \cdot 4} = \frac{\sqrt{3}+i}{2^{2012}}$$

Esempio 2

$$z = (i-1)$$

$$z^{-25}$$

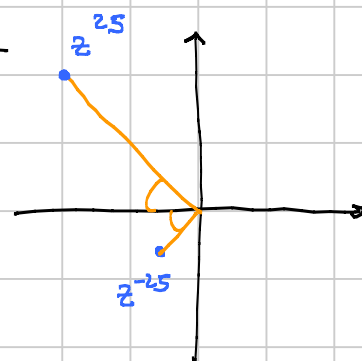
Passo in forma esponenziale: $\rho = \sqrt{2}$ e $\theta = \frac{3\pi}{4}$



Quindi $z = \sqrt{2} e^{\frac{3\pi}{4}i}$, da cui

$$\begin{aligned} z^{25} &= \left(\sqrt{2} e^{\frac{3\pi}{4}i} \right)^{25} = (\sqrt{2})^{25} e^{\frac{75\pi}{4}i} = (\sqrt{2})^{25} e^{\frac{(72+3)\pi}{4}i} \\ &= 2^{12} \sqrt{2} \cdot e^{(18\pi + \frac{3\pi}{4})i} = 2^{12} \sqrt{2} e^{\frac{3\pi}{4}i} \\ &= 2^{12} (-1+i) \end{aligned}$$

$$z^{-25} = \frac{1}{z^{25}} = \frac{1}{2^{12}(-1+i)} \frac{1+i}{1+i} = \frac{1+i}{2^{12}(-2)} = -\frac{1+i}{2^{13}}$$



Oss. Vale sempre la formula $\frac{1}{w} = \frac{\bar{w}}{|w|^2}$,

quindi un numero complesso ed il suo inverso stanno su rette uscenti dall'origine e simmetriche rispetto all'asse x .

— o — o —

Esempio 3 Radici quarte di -1 .

Questo vuol dire risolvere l'equazione $z^4 = -1$. Dalla teoria sappiamo che l'eq. ha esattamente 4 soluzioni, che nel piano di Gauss sono i vertici di un quadrato con centro nell'origine.

Scrivo $z = \rho e^{i\theta}$ con ρ e θ incogniti. Scrivo -1 in forma esponenziale $-1 = 1 \cdot e^{\pi i}$. Impongo $z^4 = -1$, cioè

$$(\rho e^{i\theta})^4 = 1 \cdot e^{\pi i} ; \quad \boxed{\rho^4} e^{\boxed{4i\theta}} = \boxed{1} e^{\boxed{\pi i}}$$

Due numeri complessi in forma esponenziale sono uguali $\Leftrightarrow$ hanno lo stesso ρ e argomenti che differiscono di $2k\pi$. Ottengo

$$\begin{cases} \rho^4 = 1 \\ 4\theta = \pi + 2k\pi \end{cases}$$

$$\begin{cases} \rho = 1 \\ \theta = \frac{\pi}{4} + k \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Assegno i valori $k=0, 1, 2, 3$ e trovo le 4 soluzioni

$$z_1 = 1 \cdot e^{\frac{\pi i}{4}} \quad k=0$$

$$z_2 = 1 \cdot e^{\frac{3\pi i}{4}} \quad k=1$$

$$z_3 = 1 \cdot e^{\frac{5\pi i}{4}} \quad k=2$$

$$z_4 = 1 \cdot e^{\frac{7\pi i}{4}} \quad k=3$$

Volevamo si possano scrivere in forma cartesiana ($a = \rho \cos \theta$, $b = \rho \sin \theta$)

$$z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} (1+i)$$

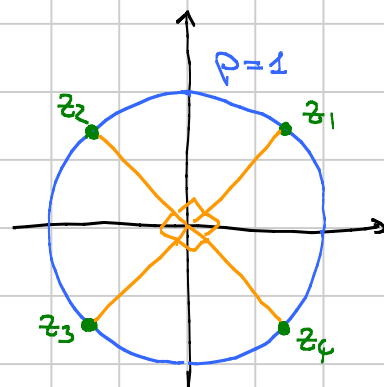
$$z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} (-1+i)$$

$$z_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} (-1-i)$$

$$z_4 = \frac{\sqrt{2}}{2} (1-i)$$

Più rapidamente: trovata z_1 , le restanti radici si ottengono ruotando la prima di

$$\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$



Applicazione: trovare la soluzione generale dell'eq. diff.

$$u^{(4)} + u = 0 \quad (\text{lineare, coeff cost., omogenea, ordine 4})$$

Polinomio associato: $x^4 + 1 = 0$. Radici: è come fare $x^4 = -1$, quindi le radici sono z_1, z_2, z_3, z_4 come sopra. Le radici sono a 2 a 2 coniugate, cioè della forma $\alpha \pm i\beta$

$$z_1 \text{ e } z_4 \text{ sono } = \frac{\sqrt{2}}{2} (1 \pm i) = \frac{\sqrt{2}}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{2} i = \alpha \pm i\beta$$

$$\leadsto \text{produce 2 elem. della base: } e^{\frac{\sqrt{2}}{2}t} \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t\right), e^{\frac{\sqrt{2}}{2}t} \sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t\right)$$

$$z_2 \text{ e } z_3 \text{ sono: } \frac{\sqrt{2}}{2} (-1 \pm i) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{2} i = \alpha \pm i\beta$$

$$\leadsto \text{produce 2 elem. della base: } e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}t} \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t\right), e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}t} \sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t\right)$$

Soluzione generale: $u(t) =$ combinazione lineare dei 4 elementi della base.

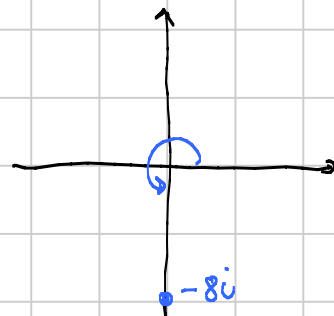
Esempio 4 Trovare le radici cubiche di $-8i$, cioè risolvere $z^3 = -8i$

$$z = \rho e^{i\theta}, \quad -8i = 8 \cdot e^{\frac{3\pi}{2}i}$$

$$z^3 = \boxed{\rho^3} e^{\boxed{\frac{3\pi}{2}i}} = \boxed{8} e^{\boxed{\frac{3\pi}{2}i}}$$

$$\rho^3 = 8$$

$$3\theta = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$$



$$\rho = 2, \quad \theta = \frac{\pi}{2} + \frac{2k\pi}{3} \quad \text{Non resta che sostituire } k = 0, 1, 2.$$

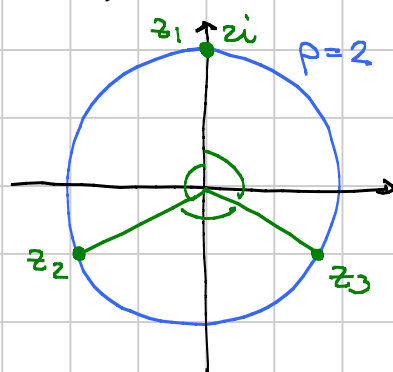
Più rapidamente: vedo a occhio una soluzione $z_1 = 2i$, $z_1^3 = -8i$ ok
poi ottengo z_2 e z_3 ruotando di 120° .

Quindi

$$z_3 = 2 e^{-\frac{\pi}{6}i} = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right) = \sqrt{3} - i$$

$\uparrow$
stesso ρ
di z_1

$$z_2 = 2 e^{\frac{7\pi}{6}i} = 2 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right) = -\sqrt{3} - i$$



$$\text{Nota bene: } -\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{3}; \quad \frac{7\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3}$$

— 0 — 0 —