

Esempio 1 $u'' + 3u' - 4u = e^{-3t}$

Cerco una soluzione dell'eq. non omogenea del tipo $u(t) = \lambda e^{-3t}$.

Allora $u'(t) = -3\lambda e^{-3t}$, $u''(t) = 9\lambda e^{-3t}$. Quindi

$$9\lambda e^{-3t} - 9\lambda e^{-3t} - 4\lambda e^{-3t} = e^{-3t} \quad -4\lambda e^{-3t} = e^{-3t} \quad \lambda = -\frac{1}{4}$$

$$u''(t) + 3u'(t) - 4u = e^{-3t}$$

Sol. generale:

$$u(t) = \underbrace{-\frac{1}{4}e^{-3t}}_{\text{sol. speciale eq. NON omog.}} + \underbrace{ae^{-4t} + be^t}_{\text{sol. gen. eq. omogenea}}$$

Esempio 2 $u'' + 3u' - 4u = e^{-4t}$ Provo con $u(t) = \lambda e^{-4t}$

$u'(t) = -4\lambda e^{-4t}$, $u''(t) = 16\lambda e^{-4t}$. Sostituisco:

$$16\lambda e^{-4t} - 12\lambda e^{-4t} - 4\lambda e^{-4t} = e^{-4t} \quad 0 = e^{-4t}$$

$$u'' + 3u' - 4u = e^{-4t}$$

Non funziona! Bella scoperta: e^{-4t} è soluzione dell'omogenea, quindi è ovvio che sostituito a sx fa venire 0.

Rimedio: mettere una t davanti, cioè cerco una soluzione del tipo

$$u(t) = \lambda t e^{-4t}$$

$$u'(t) = \lambda e^{-4t} - 4\lambda t e^{-4t}, \quad u''(t) = -4\lambda e^{-4t} - 4\lambda e^{-4t} + 16\lambda t e^{-4t}$$

Sostituisco

$$\underbrace{-8\lambda e^{-4t} + 16\lambda t e^{-4t}}_{u''} + \underbrace{3\lambda e^{-4t} - 12\lambda t e^{-4t}}_{+3u'} - \underbrace{4\lambda t e^{-4t}}_{-4u} = e^{-4t}$$

$$-5\lambda e^{-4t} = e^{-4t} \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{5}$$

Quindi la sol. generale è $u(t) = -\frac{1}{5}t e^{-4t} + a e^{-4t} + b e^t$

Fatto generale: se il secondo membro è un esponenziale del tipo e^{at} ,
il tentativo da fare è

$$u(t) = \lambda e^{at}$$

Funziona sempre tranne quando e^{at} era già soluz. dell'eq. omogenea. In tal caso il tentativo diventa

$$u(t) = \lambda t e^{at}$$

Questo non funziona se $t e^{at}$ era soluzione dell'omog. In tal caso si prova

$$u(t) = \lambda t^2 e^{at}$$

e così via finché serve.

Esempio 3 $u'' + 3u' - 4u = \sin(2t)$

Tentativo: $u(t) = \lambda \sin(2t) + \mu \cos(2t)$

$$u'(t) = 2\lambda \cos(2t) - 2\mu \sin(2t)$$

$$u''(t) = -4\lambda \sin(2t) - 4\mu \cos(2t)$$

Sostituisco:

$$\underbrace{-4\lambda \sin(2t) - 4\mu \cos(2t)}_{u''(t)} + \underbrace{6\lambda \cos(2t) - 6\mu \sin(2t)}_{+3u'(t)} - \underbrace{4\lambda \sin(2t) - 4\mu \cos(2t)}_{-4u(t)} = \sin(2t)$$

$$(-8\lambda - 6\mu) \sin(2t) + (-8\mu + 6\lambda) \cos(2t) = \sin(2t)$$

Ottengo il sistema

$$\begin{cases} -8\lambda - 6\mu = 1 & \text{coeff. di } \sin(2t) \\ +6\lambda - 8\mu = 0 & \text{coeff. di } \cos(2t) \end{cases} \quad \begin{aligned} -8\lambda - \frac{9}{2}\lambda &= 1 & ; & -\frac{25}{2}\lambda = 1 \\ \mu &= \frac{6}{8}\lambda = \frac{3}{4}\lambda \end{aligned}$$

$$\lambda = -\frac{2}{25} \quad \mu = -\frac{3}{50}$$

Soluzione generale: $u(t) = \underbrace{-\frac{2}{25}}_0 \sin(2t) - \underbrace{\frac{3}{50}}_0 \cos(2t) + a e^{-4t} + b e^t$

Fatto generale: se al 2° membro c'è $\cos(at)$ e/o $\sin(at)$, allora il tentativo da fare è

$$u(t) = \lambda \cos(at) + \mu \sin(at)$$

(Il tentativo deve essere misto in $\sin$ e $\cos$, anche se il 2° membro è puro).

Non funziona se lo stesso sin o cos è soluzione dell'omogenea, in tal caso si aggiunge t finché basta.

Esempio 4 $u'' + 4u = \sin(2t)$

Omogenea: $x^2 + 4 = 0$, $x = \pm 2i$, Sol. omog.: $u(t) = a \cos(2t) + b \sin(2t)$

In questo caso $\sin(2t)$ già compare nell'omogenea, quindi il tentativo che funziona è

$$u(t) = \lambda t \cos(2t) + \mu t \sin(2t)$$

Conti...

Esempio 5 $u'' + 3u' - 4u = t^3 + 7$

Tentativo da fare: $u(t) =$ polinomio generico dello stesso grado, quindi

$$u(t) = at^3 + bt^2 + ct + d \quad (\text{polinomio sempre completo})$$

$$u'(t) = 3at^2 + 2bt + c$$

$$u''(t) = 6at + 2b$$

Sostituendo:

$$\underbrace{6at + 2b}_{u''} + \underbrace{3at^2 + 6bt + 3c}_{+3u'} - \underbrace{4at^3 - 4bt^2 - 4ct - 4d}_{-4u} = t^3 + 7$$

$$\begin{cases} -4a = 1 & \text{coeff. } t^3 \\ 3a - 4b = 0 & \text{coeff. } t^2 \\ 6a + 6b - 4c = 0 & \text{coeff. } t \\ 2b + 3c - 4d = 7 & \text{termine noto} \end{cases}$$

Sistema lineare triangolare, quindi facilmente risolvibile

Quando non funziona? Quando 0 è tra le radici del polinomio associato all'equazione omogenea

Esempio 6 $u'''' + 9u'' = t^2$ L'omogenea associata è $u'''' + 9u'' = 0$

Polinomio: $x^4 + 9x^2 = 0$ $x^2(x^2 + 9) = 0$

Radici: $x = 0$ di molteplicità 2, $x = \pm 3i$

Base: e^{0t} , $t e^{0t}$, $\cos(3t)$, $\sin(3t)$

$$1, t, \cos(3t), \sin(3t)$$

Quindi t e t sono polinomi che sono soluz. dell'omogenea, quindi il tentativo classico $u(t) = at^2 + bt + c$ non funziona.

Bisogna aggiungere t^2 :

$$u(t) = \underbrace{at^4 + bt^3 + ct^2}_{t^2 \text{ tentativo precedente}} \quad (\text{non serve completare con } dt + e)$$

Conti...

Esempio 7 $u'' + 3u' - 4u = \cos(2t) + t^3 + e^{5t} + e^{-4t}$

Il tentativo è la somma dei tentativi, oppure risolvo considerando un pezzo per volta e poi sommo le soluzioni.

Fatto generale: se

$$\sum_{i=0}^k a_i(t) u^{(i)}(t) = f_1(t) \quad \sum_{i=0}^k a_i(t) v^{(i)}(t) = f_2(t)$$

Allora ponendo $w(t) = u(t) + v(t)$ abbiamo che

$$\sum_{i=0}^k a_i(t) w^{(i)}(t) = f_1(t) + f_2(t).$$

— o — o —