

Eq. diff. lineari omogenee. La teoria generale vale per equazioni lineari a coeff. qualunque. Se i coefficienti sono costanti, esiste una procedura per trovare una base dello spazio delle soluzioni

Eq. ordine 1 $au' + bu = 0$ con $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R} \quad a \neq 0$
 $u' = -\frac{b}{a}u$

Una soluzione si vede subito ed è $u_1(t) = e^{-\frac{b}{a}t}$ (verifica diretta).
 Quindi la soluzione generale è

$$u(t) = ce^{-\frac{b}{a}t}$$

Osservazione Il coeff. $-\frac{b}{a}$ che compare all' esponente è la radice del polinomio $ax+b$.

Eq. ordine 2 $au'' + bu' + cu = 0$ Procedura per determinare una base
 equazione $\rightarrow$ polinomio $\rightarrow$ radici $\rightarrow$ base

Polinomio associato: $ax^2 + bx + c$

Determino le radici del polinomio. Ci sono 3 casi

- $\Delta > 0$ Due radici reali distinte: λ, μ ($\lambda \neq \mu$). Allora una base è

$$e^{\lambda t}, e^{\mu t}$$

Quindi la soluzione generale è

$$u(t) = c_1 e^{\lambda t} + c_2 e^{\mu t}$$

- $\Delta = 0$ Due radici reali coincidenti, o meglio una radice reale λ di molteplicità 2. Una base è $e^{\lambda t}, te^{\lambda t}$, quindi la soluzione generale è

$$u(t) = c_1 e^{\lambda t} + c_2 te^{\lambda t}$$

Oss. Le funzioni $e^{\lambda t}$ e $t e^{\lambda t}$ non sono linearmente dipendenti.
Per essere linearmente dipendenti il coeff. deve essere un numero
e non una funzione della t .

- $\Delta < 0$ Il polinomio non ha radici reali, ma ha una coppia di radici complesse coniugate $\alpha \pm i\beta$.
Allora una base è
 $e^{\alpha t} \cos(\beta t)$ $e^{\alpha t} \sin(\beta t)$
quindi la soluzione generale è

$$u(t) = c_1 e^{\alpha t} \cos(\beta t) + c_2 e^{\alpha t} \sin(\beta t)$$

Esempio 1 $u'' + 3u' - 4u = 0$ Polinomio: $x^2 + 3x - 4 = 0$
 $(x+4)(x-1) = 0$ Radici: $x = -4$ e $x = 1$
Base: e^{-4t} , e^t
Soluzione generale: $a e^{-4t} + b e^t = u(t)$

Esempio 2 $u'' - 6u' + 9u = 0$ Polinomio: $x^2 - 6x + 9 = 0$
 $(x-3)^2 = 0$ Radici: $x = 3$ di molteplicità 2.
Base: e^{3t} , $t e^{3t}$
Soluzione generale: $u(t) = a e^{3t} + b t e^{3t}$

Esempio 3 $u'' + 8u' + 17u = 0$ Polinomio: $x^2 + 8x + 17 = 0$
Radici: $x_{1,2} = -4 \pm \sqrt{16-17} = -4 \pm \sqrt{-1} = -4 \pm i$
radici complesse coniugate $\alpha \pm i\beta$ con $\alpha = -4$ e $\beta = 1$.
Base: $e^{-4t} \cos(t)$, $e^{-4t} \sin(t)$.
Soluzione generale:
$$u(t) = a e^{-4t} \cos(t) + b e^{-4t} \sin(t)$$

Esempio 4 $u'' - 4u' = 0$ Polinomio: $x^2 - 4x = 0$ $x(x-4) = 0$
Radici: $x = 0$ e $x = 4$. Base: $e^{0t} = 1$, e^{4t}
Sol. generale: $u(t) = a + b e^{4t}$

Esempio 5 $u'' - 4u = 0$ Polinomio: $x^2 - 4 = 0$, $(x+2)(x-2) = 0$
 Radici: $x = 2$ e $x = -2$. Base: e^{2t} , e^{-2t}
 Sol. generale: $u(t) = a e^{2t} + b e^{-2t}$

Oss. Se e^{2t} , e^{-2t} è una base, allora un'altra base è
 $\frac{e^{2t} + e^{-2t}}{2}$, $\frac{e^{2t} - e^{-2t}}{2}$ conetto dopo video

Quindi un'altra base è $\sinh(2t)$, $\cosh(2t)$, quindi la soluzione generale si può scrivere come

$$u(t) = a \sinh(2t) + b \cosh(2t).$$

conetto dopo video

Esempio 6 $u'' + 4u = 0$ Polinomio: $x^2 + 4 = 0$, cioè $x^2 = -4$
 Radici: $x = \pm 2i$, complesse coniugate $\alpha \pm i\beta$
 con $\alpha = 0$ e $\beta = 2$.
 Base: $e^{0t} \cos(2t)$, $e^{0t} \sin(2t)$
 Soluzione generale:

$$u(t) = a \cos(2t) + b \sin(2t).$$

— 0 — 0 —

Se l'equazione ha ordine k , il polinomio associato avrà grado k . Per un fatto generale un polinomio di grado k ha esattamente k radici complesse se contate con molteplicità. Le k radici producono i k elementi della base secondo questa regola

* una radice reale λ di mult. m produce $e^{\lambda t}$
 * " " " " " " produce m elementi della base:
 $e^{\lambda t}$, $t e^{\lambda t}$, $t^2 e^{\lambda t}$, ..., $t^{m-1} e^{\lambda t}$

* una coppia di radici complesse coniugate $\alpha \pm i\beta$ di mult. m produce 2 elementi: $e^{\alpha t} \cos(\beta t)$, $e^{\alpha t} \sin(\beta t)$.

* una coppia di radici $\alpha \pm i\beta$ di mult. m produce $2m$ elementi:

$$\begin{array}{ll} e^{\alpha t} \cos(\beta t), & e^{\alpha t} \sin(\beta t) \\ t e^{\alpha t} \cos(\beta t), & t e^{\alpha t} \sin(\beta t) \dots \\ t^{m-1} e^{\alpha t} \cos(\beta t), & t^{m-1} e^{\alpha t} \sin(\beta t). \end{array}$$

— 0 — 0 —

Come determinare una soluzione di un'eq. non omogenea

Due metodi:

- metodo di variazione delle costanti (algoritmo che funziona sempre, ma anche nei casi semplici implica molti conti)
- provare ad indovinare (rapido quando funziona)

Esempio 1 $u'' + 3u' - 4u = e^{2t}$

L'equazione omogenea associata è $u'' + 3u' - 4u = 0$. L'abbiamo risolta prima e ha come sol. generale $u(t) = a e^{-4t} + b e^t$

Mi serve una soluzione qualunque dell'eq. NON omogenea.

La cerco della forma $u(t) = \lambda e^{2t}$. Vedo se esistono valori di λ per cui questa è soluzione. Calcolo

$$u'(t) = 2\lambda e^{2t}, \quad u''(t) = 4\lambda e^{2t}$$

Sostituisco nell'equazione

$$4\lambda e^{2t} + 6\lambda e^{2t} - 4\lambda e^{2t} = e^{2t}, \quad 6\lambda e^{2t} = e^{2t} \Rightarrow \lambda = \frac{1}{6}$$
$$u'' + 3u' - 4u = e^{2t}$$

Quindi $\bar{u}(t) = \frac{1}{6} e^{2t}$ è soluzione dell'equazione non omogenea.

In conclusione, la soluzione generale dell'eq. non omogenea è

$$u(t) = \underbrace{\frac{1}{6} e^{2t}}_{\substack{\text{sol.} \\ \text{indovinata}}} + \underbrace{a e^{-4t} + b e^t}_{\text{sol. gen. eq. omogenea}}$$