

EQUAZIONI DIFFERENZIALI LINEARI

Un'eq. diff. lineare di ordine k si presenta nella forma

$$a_k(t)u^{(k)} + a_{k-1}(t)u^{(k-1)} + \dots + a_1(t)u' + a_0(t)u = f(t)$$

$$\sum_{i=0}^k a_i(t)u^{(i)} = f(t)$$

Fatto generale La soluzione di un'eq. diff. lineare esiste finché può, cioè non ha problemi fino a quando non hanno problemi i coefficienti, o il termine noto.

Detto in altro modo: se i coeff. esistono e sono continui in un certo intervallo (a,b) , e lo stesso vale per il termine noto, allora anche la soluzione esiste per ogni $t \in (a,b)$

Teorema 1 L'insieme delle soluzioni di un'eq. diff. lineare di ordine k OMOGENEA è uno spazio vettoriale di dimensione k .

Quindi, se $u_1(t), u_2(t), \dots, u_k(t)$ è una base di questo spazio, allora la soluzione generale sarà della forma

$$u(t) = c_1 u_1(t) + c_2 u_2(t) + \dots + c_k u_k(t)$$

dove $c_1, c_2, \dots, c_k$ sono k parametri reali.

Operativamente: se uno conosce una base, allora conosce la soluzione generale.

Osservazione In uno spazio vettoriale le basi sono infinite, ma ne basta una qualunque.

Dim.

1° fatto La somma di 2 soluzioni è ancora una soluzione.

Siano $u(t)$ e $v(t)$ due soluzioni di una eq. omogenea, cioè

$$\sum_{i=0}^k a_i(t) u^{(i)}(t) = 0 \quad \sum_{i=0}^k a_i(t) v^{(i)}(t) = 0$$

↑
l'eq. è omogenea

Sia $w(t) = u(t) + v(t)$. Dico che $w(t)$ è una soluzione della stessa equazione. Infatti

$$\sum_{i=0}^k a_i(t) w^{(i)}(t) = \sum_{i=0}^k a_i(t) [u^{(i)}(t) + v^{(i)}(t)]$$

↑
derivata somma =
somma derivate

$$= \sum_{i=0}^k a_i(t) u^{(i)}(t) + \sum_{i=0}^k a_i(t) v^{(i)}(t) = 0 + 0 = 0$$

uso che u e v
sono soluzioni
↓

2° fatto Il prodotto di una soluzione per una costante è ancora una soluzione.

Sia $u(t)$ una soluzione, sia $\lambda \in \mathbb{R}$, sia $w(t) = \lambda u(t)$. Per ipotesi $u(t)$ è una soluzione, cioè

$$\sum_{i=0}^k a_i(t) u^{(i)}(t) = 0$$

Ma allora

$$\sum_{i=0}^k a_i(t) w^{(i)}(t) = \sum_{i=0}^k a_i(t) \lambda u^{(i)}(t) = \lambda \sum_{i=0}^k a_i(t) u^{(i)}(t) = 0$$

3° fatto Per dimostrare che lo spazio ha dimensione k , bisogna trovare k generatori linearmente indipendenti.

Supponiamo che tutti i coeff. siano definiti per t in un certo intervallo (a, b) . Prendo $t_0 \in (a, b)$. Risolvo il problema di Cauchy con condizioni iniziali

$$\left. \begin{array}{l} u(t_0) = \\ u'(t_0) = \\ \vdots \\ u^{(k-1)}(t_0) = \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Metto tutti o tratto uno } u \neq \text{ in posizione} \\ i\text{-esima.} \end{array}$$

Ottengo così soluzioni $u_1(t), u_2(t), \dots, u_k(t)$.

Dico che questi sono k generatori linearmente indipendenti.

Devo dimostrare 2 cose

1°: che sono linearmente indipendenti Considero una loro comb. line.

$$c_1 u_1(t) + \dots + c_k u_k(t) = w(t)$$

e suppongo che sia la funzione nulla. Allora tutte le sue derivate si annullano in t_0 . Ma la derivata i -esima di $w(t)$ calcolata in t_0 è la somma delle derivate i -esime, e queste sono tutte 0 tranne quella di $u_i(t)$ che fa 1.

Quindi $w^{(i)}(t_0) = c_i = 0$, cioè tutti i c_i sono nulli

2°: che ogni soluzione è combinazione lineare delle $u_i(t)$.

Prendo una soluzione $w(t)$ qualunque. Questa e le sue derivate avranno dei valori in t_0 . Prendo

$$c_1 = w(t_0), \quad c_2 = w'(t_0), \quad c_3 = w''(t_0), \dots, \quad c_k = w^{(k-1)}(t_0).$$

Allora

$$c_1 u_1(t) + c_2 u_2(t) + \dots + c_k u_k(t) = v(t)$$

è una soluzione dell'equazione e coincide in t_0 con $w(t)$, insieme alle sue derivate fino alla $(k-1)$ -esima.

Allora $v(t)$ e $w(t)$ sono 2 soluzioni dello stesso problema di Cauchy, quindi coincidono per unicità.

— 0 — 0 —

Teorema 2 L'insieme delle soluzioni di una eq. diff. lineare di ordine k NON omogenea si rappresenta nella forma

$$u(t) = c_1 u_1(t) + c_2 u_2(t) + \dots + c_k u_k(t) + \bar{u}(t)$$

dove

- $u_1(t), u_2(t), \dots, u_k(t)$ è una base dello spazio delle soluzioni dell'eq. omogenea associata, cioè l'equazione che ha gli stessi coefficienti ma $f(t) \equiv 0$
- $\bar{u}(t)$ è una soluzione qualunque dell'equazione non omogenea

Operativamente La formula permette di trovare TUTTE le soluzioni dell'equazione NON omogenea pur di conoscere

- una soluzione qualunque dell'eq. NON omogenea
- tutte le soluzioni dell'eq. omogenea (basta in realtà una base).

Dim. Sia $\bar{u}(t)$ una soluzione qualunque della non omogenea.
Sia $u(t)$ un'altra soluzione della non omogenea.

Allora per ipotesi

$$\sum_{i=0}^k a_i(t) \bar{u}^{(i)}(t) = f(t) \quad \text{e} \quad \sum_{i=0}^k a_i(t) u^{(i)}(t) = f(t)$$

Pongo $w(t) = u(t) - \bar{u}(t)$. Allora

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^k a_i(t) w^{(i)}(t) &= \sum_{i=0}^k a_i(t) [u^{(i)}(t) - \bar{u}^{(i)}(t)] \\ &= \sum_{i=0}^k a_i(t) u^{(i)}(t) - \sum_{i=0}^k a_i(t) \bar{u}^{(i)}(t) \\ &= f(t) - f(t) = 0 \end{aligned}$$

Quindi $w(t)$ è una soluzione dell'equazione omogenea. Ma allora $u(t) - \bar{u}(t) = w(t)$, quindi

perché w è soluz. dell'eq. omog.

$$u(t) = \bar{u}(t) + w(t) = \bar{u}(t) + \underbrace{c_1 u_1(t) + \dots + c_k u_k(t)}_{= 0 = 0 =}$$

che è la formula che volevamo dimostrare.

Operativamente servono:

- un metodo per trovare una base per lo spazio delle soluzioni delle equazioni omogenee
- un metodo per trovare sol. (almeno 1) per equazioni non omogenee.