

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 096

Titolo nota

02/12/2011

Potenza n -esima di un numero complesso

Dati $z \in \mathbb{C}$ e $n \in \mathbb{N}$,
calcolare z^n . Stessa cosa
con esponente $n \in \mathbb{Z}$

Questa operazione è comoda in forma trigonometrica (o esponenziale)

Se $z = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$, allora $z^n = \rho^n (\cos(n\theta) + i \sin(n\theta))$

Stessa cosa in forma esponenziale: $z = \rho e^{i\theta}$, quindi

$$z^n = (\rho e^{i\theta})^n = \rho^n e^{in\theta}$$

$$z^n = \rho^n e^{in\theta}$$

Dim. formale Induzione su n a partire dalla formula per il prodotto

Passo Base: $n=1$ $z^1 = \rho^1 (\cos \theta + i \sin \theta)$

Passo induttivo Ipotesi: $z^n = \rho^n (\cos(n\theta) + i \sin(n\theta))$

Tezi: $z^{n+1} = \rho^{n+1} (\cos((n+1)\theta) + i \sin((n+1)\theta))$

Dim.: $z^{n+1} = z \cdot z^n = \rho(\cos \theta + i \sin \theta) \cdot \rho^n (\cos(n\theta) + i \sin(n\theta))$

$$\begin{aligned} &= \rho^{n+1} [\underbrace{\cos \theta \cos(n\theta)}_{\text{uso ipotesi}} + \underbrace{\cos \theta \cdot \sin(n\theta)}_{\text{uso ipotesi}} i + \\ &\quad + \underbrace{\sin \theta \cdot \cos(n\theta)}_{\text{uso ipotesi}} i - \underbrace{\sin \theta \cdot \sin(n\theta)}_{\text{uso ipotesi}}] \\ &= \rho^{n+1} [\underbrace{\cos[(n+1)\theta]}_{\text{uso ipotesi}} + i \underbrace{\sin[(n+1)\theta]}_{\text{uso ipotesi}}] \end{aligned}$$

Osservazione Combinando la formula per la potenza n -esima ed il Binomio di Newton si ottengono varie formule trigonometriche

Caso $n=2$ Prendiamo $z = \cos \theta + i \sin \theta$ $n=2$ ($\rho=1$)

$$z^2 = \cos(2\theta) + i \sin(2\theta) \leftarrow \text{formula di prima}$$

$$z^2 = (\cos \theta + i \sin \theta)^2 = \cos^2 \theta + i^2 \sin^2 \theta + 2i \cos \theta \sin \theta$$

$$= \cos^2 \theta - \sin^2 \theta + 2i \cos \theta \sin \theta$$

Poiché z^2 è sempre lui, la parte reale e quella immaginaria devono coincidere, da cui

$$\cos(2\theta) = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$$

Parte reale

$$\sin(2\theta) = 2 \cos \theta \sin \theta$$

Parte immaginaria

Caso $n=3$ $z = \cos \theta + i \sin \theta$

$$z^3 = \cos(3\theta) + i \sin(3\theta)$$

$$z^3 = (\cos \theta + i \sin \theta)^3 = \cos^3 \theta + 3 \cos^2 \theta \cdot i \sin \theta + 3 \cos \theta \cdot i^2 \sin^2 \theta + i^3 \sin^3 \theta$$

$$= \cos^3 \theta + 3i \cos^2 \theta \sin \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta - i \sin^3 \theta$$

Uguagliando parte reale e parte immaginaria otteniamo che

$$\cos(3\theta) = \cos^3 \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta$$

$$\sin(3\theta) = 3 \cos^2 \theta \sin \theta - \sin^3 \theta$$

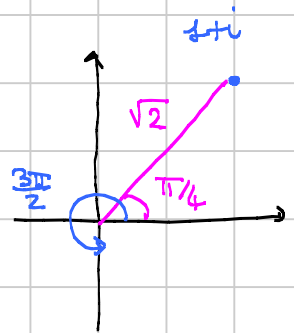
Esempio 1 $(1+i)^6$

1° modo: sviluppare con il binomio di Newton

2° modo: passare in ρ e θ .. $\rho = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2}$

In forma esponenziale

$$1+i = \sqrt{2} \cdot e^{i \frac{\pi}{4}}$$



Quindi

$$(1+i)^6 = \left[\sqrt{2} e^{i \frac{\pi}{4}} \right]^6 = (\sqrt{2})^6 \cdot e^{i \frac{\pi}{4} \cdot 6} = 8 \cdot e^{i \frac{3\pi}{2}} = -8i$$

modulo $\uparrow$ 8 e
argomento $\frac{3\pi}{2}$

Esempio 2 $(1+i)^{6000}$

$$(1+i)^{6000} = \left[\sqrt{2} e^{i \frac{\pi}{4}} \right]^{6000} = (\sqrt{2})^{6000} e^{i \frac{\pi}{4} \cdot 6000}$$

$$= 2^{3000} \cdot e^{i 1500\pi}$$

multiplo di 2π

$$= 2^{3000}$$

Radice n -esima di un numero complesso

Dato un numero complesso $a \in \mathbb{C}$, le radici complesse n -esime di a sono tutti i numeri complessi $z \in \mathbb{C}$ tali che $z^n = a$ ($n \geq 1$ intero)

Se $a = 0$, allora l'unico z che soddisfa l'equazione è $z = 0$.

Basta vedere che $|z|^n = |a| = 0$, quindi $|z| = 0$.

Se $a \neq 0$, allora esistono sempre esattamente n numeri complessi z che verificano l'equazione $z^n = a$. Disegnati nel piano di Gauss, questi n numeri sono i vertici di un poligono di n lati regolare con centro nell'origine.

Come si trovano? Si scrivono a e z in forma esponenziale

$$a = r e^{i\varphi} \quad (r \text{ e } \varphi \text{ sono dati perché } a \text{ è dato})$$

$$z = \rho e^{i\theta} \quad (\rho \text{ e } \theta \text{ sono incogniti})$$

$$z^n = \rho^n e^{in\theta} = r e^{i\varphi} = a$$

↑
formula per
potenza n -esima

Cosa deve accadere perché i 2 numeri siano uguali? Devono avere

→ lo stesso modulo

→ argomenti che differiscono per un multiplo di 2π

Quindi

$$\rho^n = r$$

$$n\theta = \varphi + 2k\pi$$

$$\rho = \sqrt[n]{r}$$

$$\theta = \frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}$$

A k devo dare tutti i possibili valori interi $0, 1, 2, 3, \dots$ (anche negativi).

Tuttavia ottengo angoli diversi solo per $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$.

Esempio 1 Radici cubiche di i . Risolvere $z^3 = 8i$ $i^{\pi/2}$

Scrivo $8i$ in forma esponenziale: $8i = 8e^{i\pi/2}$

Scrivo $z = \rho e^{i\theta}$

$$z^3 = \rho^3 e^{i3\theta} = 8 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}}$$

Quindi $\rho^3 = 8$

$$3\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$\rho = 2$$

$$\theta = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}$$

Provo a sostituire $k = 0, 1, 2, \dots$

$$k=0 \rightsquigarrow \theta = \frac{\pi}{6}$$

$$k=1 \rightsquigarrow \theta = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} = \frac{5\pi}{6}$$

$$k=2 \rightsquigarrow \theta = \frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3} = \frac{3\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$$

$$k=3 \rightsquigarrow \theta = \frac{\pi}{6} + 2\pi = \frac{\pi}{6} \text{ già trovato}$$

$$k=4 \rightsquigarrow \theta = \frac{\pi}{6} + \frac{8\pi}{3} = \frac{5\pi}{6} + 2\pi \text{ "}$$

Calcolati i valori di θ corrispondenti a $k = 0, 1, 2$, i restanti coincidono sempre con questi.

Quindi le 3 soluzioni sono

$$z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$$

$$z_2 = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$$

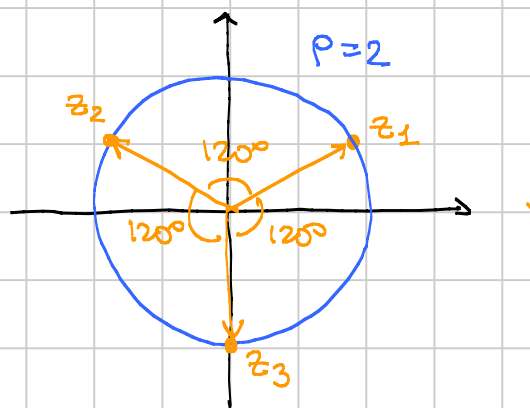
$$z_3 = 2e^{i\frac{3\pi}{2}}$$

Oss. È facile a questo p.to passare in forma cartesiana

$$z_1 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = \sqrt{3} + i$$

$$z_2 = \dots = -\sqrt{3} + i$$

$$z_3 = \dots = -2i$$



Achtung! Quando si scrive $\rho^3 = 8$ si intende l'unica radice cubica reale di 8.

Non confondere le radici n -esime in ambito reale dalle radici n -esime in ambito complesso.