

Numeri complessi: forma trigonometrica

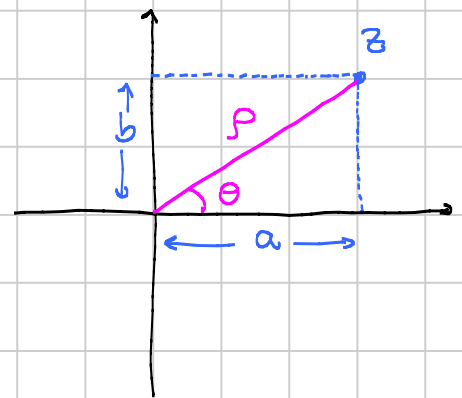
Per individuare un p.to z del piano di Gauss possiamo

→ assegnare le sue coordinate a e b
(forma cartesiana)

→ in alternativa, assegnare le sue coordinate polari ρ e θ , dove

ρ = distanza dall'origine

θ = angolo formato tra la congiungente e l'origine con z ed il semiasse reale positivo.



Corretto dopo video

ρ e θ si dicono coordinate polari del p.to, mentre a e b si dicono coordinate cartesiane del p.to

In coordinate cartesiane, a e b possono essere reali qualunque e coordinate diverse individuano p.ti diversi.

In coordinate polari, $\rho \geq 0$ e θ è un angolo, cioè va pensato a meno di multipli di 2π . Inoltre c'è il problema del θ dell'origine che non è definito.

Formule di passaggio. Se conosco ρ e θ , allora

$$a = \rho \cos \theta$$

$$b = \rho \sin \theta$$

trigonometria nei triangoli rettangoli

Se conosco a e b , allora

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$$

(teorema di Pitagora).

mentre per θ il consiglio è di guardare il disegno.

Achtung! Dividendo tra di loro le formule per b ed a si ottiene

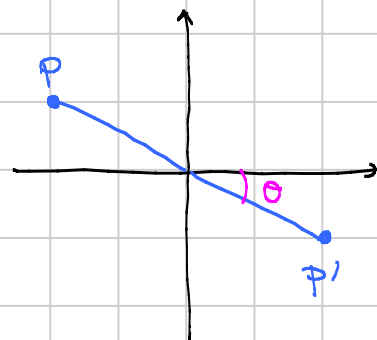
$$\frac{b}{a} = \frac{\rho \sin \theta}{\rho \cos \theta} = \tan \theta \quad \text{da cui} \quad \theta = \arctan \frac{b}{a}$$

Formula peccatosissima! Intanto ci sono problemi quando $a=0$.

Poi essendoci $\arctan$ possono venire soltanto valori in $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Quindi la formula funziona solo nel I e IV quadrante.

Nel II e III quadrante la formula fornisce il θ del p.to simmetrico rispetto all'origine, dunque sfasato di π . Quindi nel II e III quadrante la formula giusta è



$$\theta = \arctan \frac{b}{a} + \pi$$

Formula trigonometrica $z = a + bi$

Uso le formule per a e b in funzione di ρ e θ e ottengo

$$z = \rho \cos \theta + (\rho \sin \theta)i = \rho (\cos \theta + i \sin \theta)$$

Modulo e coniugato in forma trigonometrica: se $z = \rho (\cos \theta + i \sin \theta)$, allora

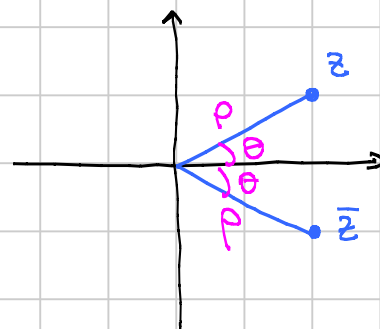
$$|z| = \rho$$

$$\bar{z} = \rho (\cos \theta - i \sin \theta) = \rho (\cos(-\theta) + i \sin(-\theta))$$

Quindi il coniugato di z ha lo stesso ρ e θ cambiato di segno.

Argomento di un numero complesso

$$\text{Arg}(z) = \theta$$



Esempi

$$\text{Arg}(5) = 0$$

$$\text{Arg}(-5) = \pi$$

$$\text{Arg}(i) = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Arg}(-i) = \frac{3\pi}{2}$$

$$\text{Arg}(-i) = -\frac{\pi}{2}$$

$$\text{Arg}(4i) = \frac{\pi}{2}$$

← stessa cosa →

Prodotto in forma trigonometrica Prendiamo 2 numeri complessi

$$z = \rho (\cos \theta + i \sin \theta)$$

$$w = r (\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

$$z \cdot w = \rho r (\cos \theta + i \sin \theta) \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

$$= \rho r (\underbrace{\cos \theta \cos \varphi - \sin \theta \sin \varphi}_{\cos(\theta + \varphi)} + i \underbrace{\sin \theta \cos \varphi + \cos \theta \sin \varphi}_{\sin(\theta + \varphi)})$$

$$= \rho r (\cos(\theta + \varphi) + i \sin(\theta + \varphi))$$

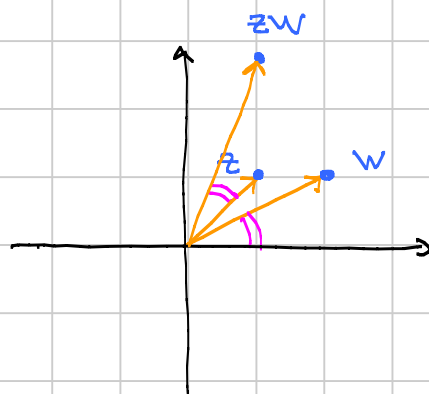
Quindi $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$

$$\text{Arg}(z \cdot w) = \text{Arg}(z) + \text{Arg}(w)$$

Quindi moltiplicare 2 numeri complessi vuol dire moltiplicare i moduli e sommare gli argomenti.

Reciproco in forma trigonometrica

$$\begin{aligned} \frac{1}{z} &= \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{\rho (\cos(-\theta) + i \sin(-\theta))}{\rho^2} \\ &= \frac{1}{\rho} (\cos(-\theta) + i \sin(-\theta)) \end{aligned}$$



Quindi fare il reciproco equivale a fare il reciproco di ρ e cambiare θ di segno

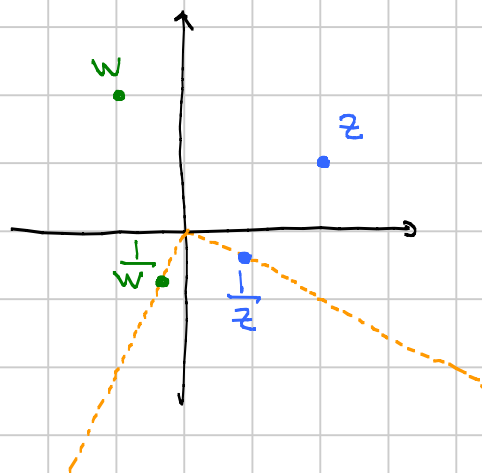
Divisione in forma trigonometrica

$$z = \rho (\cos \theta + i \sin \theta) \quad w = r (\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

$$\frac{z}{w} = z \cdot \frac{1}{w} = \rho (\cos \theta + i \sin \theta) \cdot \frac{1}{r} (\cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi))$$

$$= \frac{\rho}{r} (\cos(\theta - \varphi) + i \sin(\theta - \varphi))$$

Dividere i moduli
Sottrarre gli argomenti



Forma esponenziale Gli ingredienti sono ancora ρ e θ , ma vengono presentati nella forma

$$z = \rho e^{i\theta}$$

Applicando "bovinamente" le proprietà formali dell'esponenziale tornano tutte le formule per prodotto e quozienti!

$$z = \rho e^{i\theta}, \quad w = r e^{i\varphi}$$

$$z \cdot w = \rho e^{i\theta} \cdot r e^{i\varphi} = \rho r e^{i\theta} \cdot e^{i\varphi} = \rho r e^{i(\theta+\varphi)}$$

↑
Formalmente: $e^A \cdot e^B = e^{A+B}$

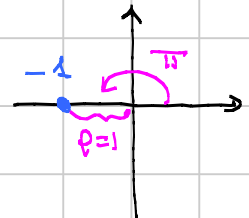
$$\frac{1}{z} = (z)^{-1} = (\rho e^{i\theta})^{-1} = \rho^{-1} e^{-i\theta} = \frac{1}{\rho} e^{i(-\theta)}$$

$$\frac{z}{w} = \rho e^{i\theta} \cdot (r e^{i\varphi})^{-1} = \frac{\rho}{r} e^{i\theta} \cdot e^{-i\varphi} = \frac{\rho}{r} e^{i(\theta-\varphi)}$$

Esempi di forma esponenziale

$$3 = 3 \cdot e^{i0}$$

$$-1 = 1 \cdot e^{i\pi} = e^{i\pi}$$



$$2i = 2 e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$-3i = -3 e^{i\frac{\pi}{2}}$$

NO!

Davanti all'esponenziale ci vuole ρ !!!!

$$-3i = 3 e^{\frac{3\pi}{2}i}$$

$$= 3 e^{-\frac{\pi}{2}i}$$