

NUMERI COMPLESSI

- Forma cartesiana
- Forma trigonometrica
- Forma esponenziale

Forma cartesiana Un numero complesso è un oggetto della forma $a+bi$

dove a e b sono numeri reali, e i = unità immaginaria è tale che $i^2 = -1$.

Si indica con $\mathbb{C}$ l'insieme dei numeri complessi.

Parte reale e immaginaria Se $z = a+bi$ è un numero complesso, allora a si dice parte reale e b si dice parte immaginaria.

In simboli

$$a = \operatorname{Re}(z)$$

$$b = \operatorname{Im}(z)$$

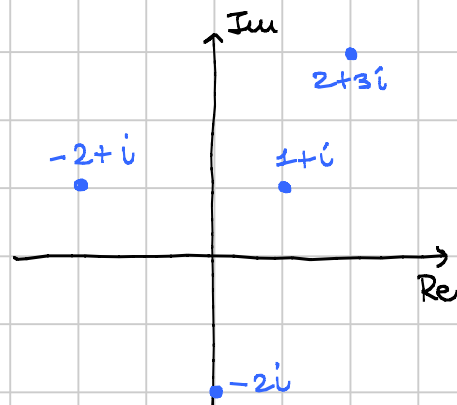
Rappresentazione geometrica Ad ogni numero complesso $z = a+bi \in \mathbb{C}$ possiamo associare in maniera univoca il p.to (a,b) di un piano, che in questo contesto prende il nome di **PIANO DI GAUSS**

I numeri reali sono particolari numeri complessi, cioè quelli con parte immaginaria nulla: $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$.

Nel piano di Gauss corrisponderanno all' "asse x " che ora si chiama asse reale.

In simboli

$$\operatorname{Im}(z) = 0 \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$$



I numeri complessi $z \in \mathbb{C}$ tali che $\operatorname{Re}(z) = 0$ si dicono immaginari puri e nel piano di Gauss stanno sull'asse y (che ora è l'asse immaginario)

OPERAZIONI ALGEBRICHE

Somma e differenza Siano $z = a + bi$, $w = c + di$. Allora

$$z + w = (a + c) + (b + d)i$$

$$z - w = (a - c) + (b - d)i$$

In particolare

$$\operatorname{Re}(z \pm w) = \operatorname{Re}(z) \pm \operatorname{Re}(w), \quad \operatorname{Im}(z \pm w) = \operatorname{Im}(z) \pm \operatorname{Im}(w)$$

Prodotto Si fa usando la proprietà distributiva ed il fatto che $i^2 = -1$.

$$\begin{aligned} z \cdot w &= (a + bi) \cdot (c + di) = ac + adi + bci + bd \overset{-1}{i^2} \\ &= ac + adi + bci - bd \\ &= (ac - bd) + (ad + bc)i \end{aligned}$$

In particolare

$$\operatorname{Re}(z \cdot w) = \operatorname{Re}(z) \cdot \operatorname{Re}(w) - \operatorname{Im}(z) \cdot \operatorname{Im}(w)$$

$$\operatorname{Im}(z \cdot w) = \operatorname{Re}(z) \cdot \operatorname{Im}(w) + \operatorname{Im}(z) \cdot \operatorname{Re}(w)$$

Reciproco Sia $z = a + bi$. Voglio fare $\frac{1}{z}$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{z} &= \frac{1}{a + bi} = \frac{1}{a + bi} \cdot \frac{a - bi}{a - bi} = \frac{a - bi}{a^2 - b^2 \overset{-1}{i^2}} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2} \\ &= \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i \end{aligned}$$

L'inverso $\frac{1}{z}$ esiste purché $a^2 + b^2 \neq 0$, cioè sempre tranne nel caso in cui $a = b = 0$, cioè tranne nel caso in cui $z = 0$.

Divisione = moltiplicazione per il reciproco

$$\begin{aligned} \frac{w}{z} &= \frac{c + di}{a + bi} = \frac{c + di}{a + bi} \cdot \frac{a - bi}{a - bi} = \frac{ca - cbi + adi - bdi^2}{a^2 + b^2} \\ &= \frac{(ca + bd)}{a^2 + b^2} + \frac{(ad - cb)}{a^2 + b^2}i = w \cdot \frac{1}{z} \\ &\quad \operatorname{Re}\left(\frac{w}{z}\right) \quad \operatorname{Im}\left(\frac{w}{z}\right) \end{aligned}$$

Coniugato di un numero complesso. Se $z = a+bi$, si dice coniugato di z il numero complesso

$$\bar{z} = a-bi$$

Modulo di un numero complesso Si definisce modulo di z la quantità

$$|z| = \sqrt{a^2+b^2}$$

Oss. Il modulo di un numero complesso è un numero reale ≥ 0 .

Inoltre $|z| = 0 \Leftrightarrow a^2+b^2 = 0 \Leftrightarrow a=b=0 \Leftrightarrow z=0$.

Interpretazioni geometriche

Il coniugato di z è il simmetrico di z rispetto all'asse reale.

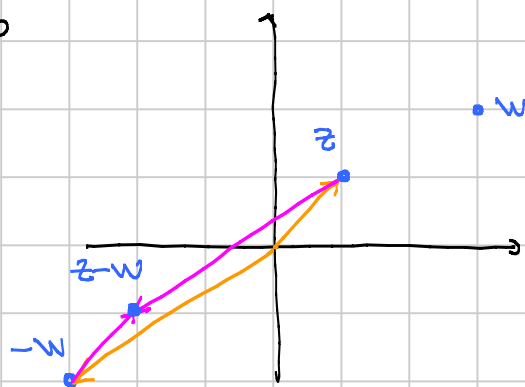
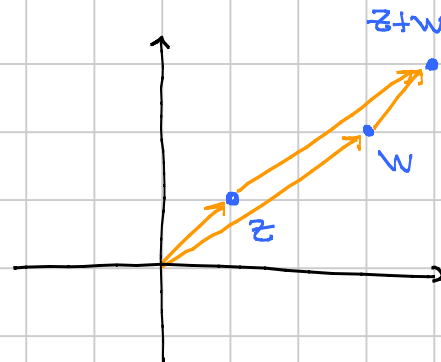
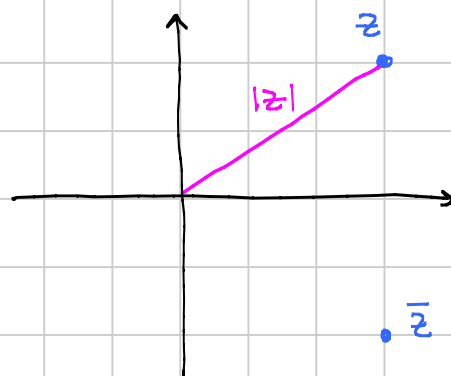
Il modulo di z è la distanza di z dall'origine.

La somma di 2 numeri complessi è "la regola del parallelogrammo" applicata ai vettori applicati nell'origine e con "la freccia" in z e w .

L'opposto $-z$ è il simmetrico di z rispetto all'origine.

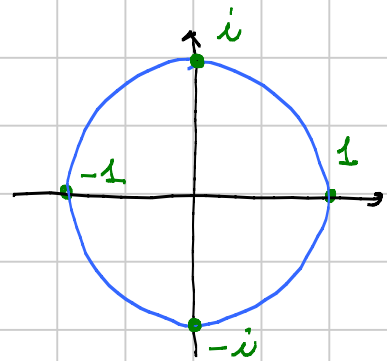
Fare $z-w$ vuol dire sommare $z+(-w)$

Il prodotto (per ora) non si capisce come agisce.



Esempi / Esercizi

① Descrivere l'insieme degli $z \in \mathbb{C}$ tali che $|z|=1$



② Proprietà del coniugato:

$$\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$$

$$\overline{z-w} = \bar{z} - \bar{w}$$

$$\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$$

$$\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}} \quad \overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}$$

Verifica nel caso del prodotto: $z = a+bi$, $w = c+di$

$$z \cdot w = (a+bi) \cdot (c+di) = (ac-bd) + (ad+bc)i \quad (\text{fatto prima})$$

$$\overline{z \cdot w} = (ac-bd) - (ad+bc)i \quad \leftarrow$$

$$\begin{aligned} \bar{z} \cdot \bar{w} &= (a-bi)(c-di) = ac - adi - bci + bd i^2 \\ &= (ac-bd) - (ad+bc)i \quad \leftarrow \end{aligned}$$

③ Reciproco, coniugato, modulo:

$$z \cdot \bar{z} = |z|^2$$

$$z \cdot \bar{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2 - b^2 i^2 = a^2 + b^2 = |z|^2$$

Dalla formula precedente si ottiene che, se $z \neq 0$, allora

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

Formula alternativa per $\frac{1}{z}$

$$\frac{1}{z} = \frac{a-bi}{a^2+b^2}$$

Formula ottenuta in precedenza.