

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 093

Titolo nota

01/12/2011

Esempio 1
$$\begin{cases} u' = u^3 t^2 \\ u(0) = 5 \end{cases}$$

① Separare $\frac{du}{dt} = u^3 t^2$; $\frac{du}{u^3} = t^2 dt$

② Integrare $\int \frac{du}{u^3} = \int t^2 dt$; $-\frac{1}{2} \frac{1}{u^2} = \frac{1}{3} t^3 + c$

③ Ricavare $\frac{1}{u^2} = -\frac{2}{3} t^3 + c$ ← mettere c o -2c è la stessa cosa

$$u^2 = \frac{1}{-\frac{2}{3} t^3 + c} = \frac{3}{-2t^3 + c}$$

Ora verrebbe $u(t) = \pm \sqrt{\frac{3}{-2t^3 + c}}$ Questa è la soluzione generale.

④ Determinare c Avendo come condizioni $u(0) = 5$, devo scegliere la soluzione generale con il segno + (una $\sqrt{\quad}$ è sempre ≥ 0).
Quindi impongo

$$5 = u(0) = + \sqrt{\frac{3}{c}} \quad ; \quad 25 = \frac{3}{c} \Rightarrow c = \frac{3}{25}$$

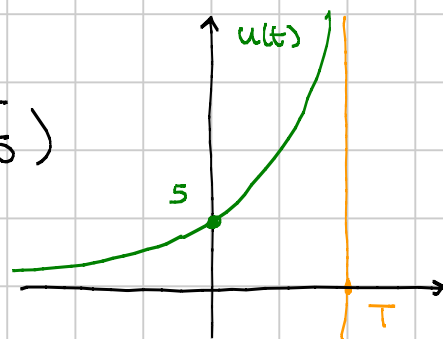
Soluzione problema Cauchy: $u(t) = \sqrt{\frac{3}{-2t^3 + \frac{3}{25}}} = \sqrt{\frac{75}{3 - 50t^3}}$ sd. p.m. Cauchy

⑤ Verificare Farlo!!! Sia la cond. iniz., sia l'equazione.

⑥ Studio della soluzione Definita per $3 - 50t^3 > 0$, $50t^3 < 3$,
quindi $t < \sqrt[3]{\frac{3}{50}}$

Intervallo massimale di esistenza: $(-\infty, \sqrt[3]{\frac{3}{50}})$

Tempo di vita: $T = \sqrt[3]{\frac{3}{50}}$



$\lim_{t \rightarrow T^-} u(t) = +\infty$, quindi la soluzione ha blow-up per $T = \sqrt[3]{\frac{3}{50}}$

C'è invece esistenza globale nel passato.
— 0 — 0 —

Solita variante: se fosse stato $u(0) = 0$ avrei trovato in fase ④

$$0 = u(0) = \pm \sqrt{\frac{3}{c}} \text{ quindi impossibile}$$

In questo caso la soluzione (che per forza esiste ed è unica) è
 $u(t) \equiv 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$ (ovviamente ha esistenza globale)
— 0 — 0 —

Altra variante: esercizio parametrico $\begin{cases} u' = u^3 t^2 \\ u(0) = \alpha \end{cases}$

Domanda: per quali valori di α l'equazione ha esistenza globale nel futuro?

④ Determinare c in funzione di α $\alpha = u(0) = \pm \sqrt{\frac{3}{c}}$

Farendo il quadrato

$$\alpha^2 = \frac{3}{c}, \text{ quindi } c = \frac{3}{\alpha^2}. \text{ Quindi la sol. del pb. di Cauchy è}$$

$$u(t) = \pm \sqrt{\frac{3}{-2t^3 + \frac{3}{\alpha^2}}} = \boxed{\pm} \sqrt{\frac{3\alpha^2}{3 - 2\alpha^2 t^3}} = \alpha \sqrt{\frac{3}{3 - 2\alpha^2 t^3}}$$

con il $\oplus$ se $\alpha > 0$
con il $\ominus$ se $\alpha < 0$

La soluzione ha sempre problemi quando denominatore = 0, cioè quando
 $2\alpha^2 t^3 = 3$, cioè $t = \sqrt[3]{\frac{3}{2\alpha^2}} > 0$, quindi non c'è mai esistenza globale nel futuro, tranne nel caso $\alpha = 0$ in cui la soluzione è quella costante
— 0 — 0 —

Esempio 2 $\begin{cases} u' = u \sin t \\ u(0) = -2 \end{cases}$

Oss.: L'eq. è a variabili separabili, ma anche lineare 1° ordine omogenea

① Separare $\frac{du}{dt} = u \sin t$; $\frac{du}{u} = \sin t \, dt$

② Integrare $\int \frac{du}{u} = \int \sin t \, dt$; $\log |u| = -\cos t + c$

③ Ricavare $\log |u| = -\cos t + c$; $|u| = e^{-\cos t + c}$

$u(t) = \pm e^{-\cos t + c}$ (scelgo $\pm$ a seconda della cond. iniziale)

In realtà

$u(t) = \boxed{\pm e^c} \cdot e^{-\cos t} = c \cdot e^{-\cos t}$ con $c \in \mathbb{R}$ qualunque
↑
costante

Quindi la soluzione generale è $\boxed{u(t) = c \cdot e^{-\cos t}}$ verifica !!!

④ Determinare c. Se sono arrivato alla formula finale ho che

$-2 = u(0) = c \cdot e^{-1}$; $-2 = \frac{c}{e}$; $c = -2e$ da cui

$\boxed{u(t) = -2e e^{-\cos t}}$ Sol. pb. Cauchy

Se mi ero fermato alla formula $u(t) = \pm e^{-\cos t + c}$ ho che

$-2 = u(0) = \pm e^{-1+c}$. Scelgo il segno $\ominus$ e ritrovo

$-2 = -e^{-1+c}$; $2 = e^{-1+c}$; $-1+c = \log 2$; $c = 1 + \log 2$

Quindi sol. pb. Cauchy $u(t) = -e^{-\cos t + 1 + \log 2}$ che è la stessa cosa a meno di percorso.

— o — o —

Esempio 3 $\begin{cases} u' = -\frac{1}{u} \\ u(0) = 4 \end{cases}$

① Separare $\frac{du}{dt} = -\frac{1}{u} ; u du = -dt$

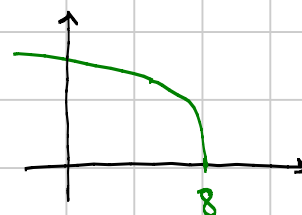
② Integrare $\int u du = \int -dt ; \frac{1}{2} u^2 = -t + c$

③ Ricavare $u^2 = -2t + c$

$u(t) = \pm \sqrt{c-2t}$ *soluzione generale*

④ Determinare c $4 = u(0) = \pm \sqrt{c} \Rightarrow c = 16$ e serve segno +

Sol. pbm. Cauchy: $u(t) = \sqrt{16-2t}$ (verifica)



⑤ Studio u Definita per $16-2t \geq 0$, cioè $t \leq 8$.

Int. max. di esistenza: $(-\infty, 8]$, tempo di vita: $T=8$.

$\lim_{t \rightarrow 8^-} u(t) = 0$ quindi non c'è BLOW-UP, ma BREAK-DOWN

Infatti $u \rightarrow 0$, cioè tende ad uscire dalla zona in cui è definito il 2° membro $\frac{1}{u}$ dell'equazione. In tal caso si ha pure che

$$\lim_{t \rightarrow 8^-} u'(t) = \lim_{t \rightarrow 8^-} \frac{-2}{2\sqrt{16-2t}} = \lim_{t \rightarrow 8^-} \frac{-1}{\sqrt{16-2t}} = -\infty$$

— 0 — 0 —

Ha senso solo per $\alpha \neq 0$.

Variante: se fosse stato $u(0) = \alpha$, per quali α c'è esistenza globale nel futuro (cioè $T = +\infty$)

④ $\alpha = u(0) = \pm \sqrt{c} \Rightarrow c = \alpha^2 \Rightarrow u(t) = \pm \sqrt{\alpha^2 - 2t}$

↳ dipende dal segno di α

Questa ha sempre problemi per $t = \frac{\alpha^2}{2} > 0$, quindi non c'è mai esistenza globale nel futuro.

— 0 — 0 —