

Eq. diff. a variabili separabili

$$u' = f(t)g(u)$$

- ① Separare
- ② Integrare
- ③ Ricavare

Obiettivo: trovare la formula per la soluzione generale (con il parametro c)

Esempio 1 $u' = \boxed{t^3} \boxed{u^2}$

$\uparrow$ $\uparrow$
 $f(t)$ $g(u)$

- ① Separare: tutte le u a sx, tutte le t a dx

$$\frac{du}{dt} = t^3 u^2 ; \quad \frac{du}{u^2} = t^3 dt$$

$$\frac{du}{dt} = f(t)g(u) ; \quad \frac{du}{g(u)} = f(t) dt$$

- ② Integrare: a sx rispetto ad u , a dx rispetto a t

$$\int \frac{du}{u^2} = \int t^3 dt ; \quad -\frac{1}{u} = \frac{1}{4} t^4 + \boxed{c}$$

$\uparrow$
parametro libero

$$\int \frac{du}{g(u)} = \int f(t) dt + c$$

- ③ Ricavare u in funzione di t dalla formula ottenuta al passo prec.

$$-\frac{1}{u} = \frac{1}{4} t^4 + c ; \quad -u = \frac{1}{\frac{1}{4} t^4 + c} ; \quad u = \frac{-1}{\frac{1}{4} t^4 + c} = \frac{-4}{t^4 + 4c} = \frac{-4}{t^4 + c}$$

Soluzione generale dell'eq. diff. è

essendo $4c$ una costante qualunque, la posso chiamare c .

$$\boxed{u(t) = \frac{-4}{t^4 + c}}$$

Oss. Questa procedura permette di trovare la soluzione generale di un'eq. diff. a variabili separabili a patto di

- saper fare le primitive in fase ②;
- saper ricavare in fase ③.

Supponiamo ora di avere un problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = u^2 t^3 & \text{eq. diff.} \\ u(0) = 5 & \text{cond. iniziale} \end{cases}$$

④ Determinare c (usando la cond. iniziale)

$$5 = u(0) = -\frac{4}{c} \Rightarrow c = -\frac{4}{5}$$

↑
sostituisco $t=0$ nelle
formula per la sol. gen.

Soluzione del problema di Cauchy:

$$u(t) = \frac{-4}{t^4 - \frac{4}{5}} = \frac{-20}{5t^4 - 4}$$

$$u(t) = \frac{-20}{5t^4 - 4}$$

Oss. Il fatto che il problema abbia una soluzione unica era prevedibile sulla base del teorema di esistenza ed unicità

⑤ Verificare (la condizione iniziale e l'equazione)

$$u(0) = \frac{-20}{-4} = 5 \quad \text{Ok.}$$

$$u'(t) = \frac{20}{(5t^4 - 4)^2} \cdot 20t^3 = \frac{20^2}{(5t^4 - 4)^2} \cdot t^3 \\ = [u(t)]^2 \cdot t^3 \quad \text{Ok}$$

⑥ Studiare la soluzione (per quali t è definita, come si comporta)

$$u(t) = \frac{-20}{5t^4 - 4}$$

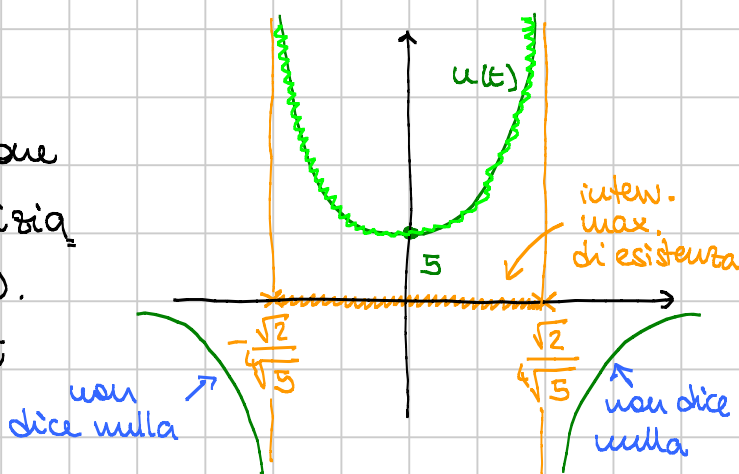
È definita dove denominatore $\neq 0$, cioè
 $5t^4 \neq 4$, cioè $t^4 \neq \frac{4}{5}$, cioè $t \neq \pm \sqrt[4]{\frac{4}{5}}$

Intervallo massimale di esistenza:

è il pezzo dell'insieme di definizione della $u(t)$ che contiene il tempo iniziale del problema di Cauchy ($t=0$).

Nell'esempio l'int. max. di esist. è

$$\left(-\sqrt[4]{\frac{4}{5}}, \sqrt[4]{\frac{4}{5}}\right)$$



Tempo di vita (nel futuro): è l'estremo superiore dell'intervallo massimale di esistenza

↓ LIFE SPAN

Nell'esempio $T = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{5}}$

Se $T = +\infty$, si dice che la soluzione ha ESISTENZA GLOBALE nel futuro

Se $T < +\infty$, si dice che la soluzione muore in T , e si va a vedere cosa succede in T . Ci sono 2 possibilità

* BLOW-UP (scoppiamento) se

$$\lim_{t \rightarrow T^-} u(t) = \pm \infty \quad (\text{è quello che succede nell'esempio})$$

* BREAK-DOWN (rottura) se non c'è blow-up, ma "u(t) esce dalla zona in cui è definito il 2° membro dell'equazione".

Di solito, ma non per forza, questo si traduce nel fatto che

$$\lim_{t \rightarrow T^-} u'(t) = \pm \infty \quad (\text{i problemi ci sono su } u'(t))$$

Oss. Tutto questo studio è per tempi t successivi al tempo iniziale t_0 .

Definizioni analoghe valgono anche per t precedenti al tempo iniz.

Nel mondo reale: un'eq. diff. descrive l'evoluzione nel tempo di una certa quantità $u(t)$.

In questo contesto

- l'intervallo massimale di esistenza è il più grande insieme di tempi in cui è attendibile l'esito del modello
- il blow-up o break-down descrive cosa accade all'istante finale

— o — o —

Variaute: se fosse stato $\begin{cases} u' = u^2 t^3 \\ u(0) = -5 \end{cases}$

La sol. generale era, come prima, $u(t) = \frac{-4}{t^4 + c}$

④ Determinare c

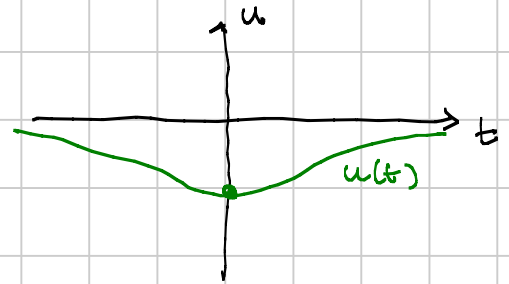
$$-5 = -\frac{4}{c} \Rightarrow c = \frac{4}{5}$$

Sol. pb. Cauchy: $u(t) = \frac{-4}{t^4 + \frac{4}{5}} = \frac{-20}{5t^4 + 4}$

⑤ Verifica: Farla!

⑥ Non ci sono problemi di denominatore, quindi l'int. max. di esistenza è tutto $\mathbb{R}$, dunque c'è esistenza globale nel passato e nel futuro ($T = +\infty$)

Oss. Per la stessa equazione diff.,
condizioni iniziali diverse conducono
a comportamenti completamente diversi.



Ultima variante: se fosse stato $u(0) = 0$

④ Determinare c: $0 = u(0) = -\frac{4}{c}$ Ops!!

In questo caso la soluzione (che deve esistere per forza per il te. di esistenza ed unicità) è la soluzione costante

$$u(t) \equiv 0 \quad \text{per ogni } t \in \mathbb{R}$$

(Verifica banale!!). Ovviamente ha esistenza globale.