

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 091

Titolo nota

30/11/2011

Esempio 1 $u' = u$ Una soluzione è $u(t) = e^t$

Nota bene: $u(t) = e^t + 3$ NON è una soluzione, infatti

$u'(t) = e^t$ che NON è uguale ad $u(t)$.

Un'altra soluzione è $u(t) = 3e^t$. Infatti $u'(t) = 3e^t = u(t)$

Osservazione: $u(t) = ce^t$, al variare di $c \in \mathbb{R}$, produce infinite soluzioni dell'eq. diff., dipendenti da un parametro.

Esempio 2 $u' = -u^2$ Una soluzione è $u(t) = \frac{1}{t}$

Verifica: $u'(t) = -\frac{1}{t^2} = -[u(t)]^2$

Invece $u(t) = \frac{3}{t}$ non è una soluzione in quanto

$$u'(t) = -\frac{3}{t^2} \quad \text{e} \quad -[u(t)]^2 = -\frac{9}{t^2} \quad \text{e non sono uguali.}$$

Un'altra soluzione è $u(t) = \frac{1}{t+3}$ (fare verifica!)

$u(t) = \frac{1}{t+c}$ è una famiglia di infinite soluzioni, dipendenti da un parametro $c \in \mathbb{R}$.

Oss. Soluzioni diverse in questo esempio hanno insieme di definizione diverso, cioè insiemi diversi dei t per i quali la relazione scritta nell'equazione è soddisfatta.

Esempio 3 $u'' = -u$ Una soluzione è $u(t) = \sin t$

Infinite soluzioni sono date da $u(t) = c \sin t$

Altre infinite soluzioni sono date da $u(t) = c \cos t$

Più in generale, si verifica (farlo!) che tutte le funzioni del tipo

$$u(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t$$

sono soluzioni dell'equazione (c_1 e c_2 sono parametri reali).

Fatto generale "Di solito" l'insieme delle soluzioni di un'eq. diff. è un insieme infinito dipendente da un numero di parametri reali uguale all'ordine dell'equazione,

A seconda dei casi, il parametro (o i parametri) possono comparire nei posti più disparati,

Soluzione generale di un'eq. diff. = formula che fornisce le infinite soluzioni con il numero opportuno di parametri.

Negli esempi: $u(t) = ce^t$, $u(t) = \frac{1}{t+c}$, $u(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t$.

PROBLEMA DI CAUCHY Equazione differenziale + condizioni iniziali

Esempio 1 $\begin{cases} u' = u \\ u(0) = 5 \end{cases}$ Risolverlo vuol dire cercare tra le infinite soluzioni quella che rispetta la condizione

→ La sol. generale è $u(t) = ce^t$

→ Determino c imponendo la condizione iniziale

$$5 = u(0) = c \cdot e^0 = c \quad \text{da cui } c = 5.$$

La soluzione del problema di Cauchy è dunque $u(t) = 5e^t$

(Verificare sempre che risolva l'eq. e rispetti le cond. iniziali)

Esempio 2 $\begin{cases} u' = -u^2 \\ u(5) = 7 \end{cases}$

La soluzione generale è $u(t) = \frac{1}{t+c}$. Impongo la cond. iniziale

$$7 = u(5) = \frac{1}{5+c}, \quad \text{quindi } 5+c = \frac{1}{7}, \quad c = \frac{1}{7} - 5 = -\frac{34}{7}$$

Quindi la sol. del problema di Cauchy è

$$u(t) = \frac{1}{t - \frac{34}{7}} = \frac{7}{7t - 34} \quad (\text{verificare equazione e condizione iniziale})$$

Come devono essere fatte le condizioni iniziali in un problema di Cauchy?

→ Devono essere tante quante l'ordine dell'equazione (il quale coincide con il numero dei parametri da determinare)

→ Se la condizione è una sola, allora è del tipo $u(t_0) = u_0$, con t_0 e u_0 assegnati.

Se la condizione è più di una, allora le condizioni devono prescrivere il valore di $u, u', u'', \dots, u^{(k-1)}$ in uno stesso p.t.to

Esempi

$$\begin{cases} u'' + 3u' = u^2 + t^2 \\ u(5) = 7 \\ u'(5) = 22 \end{cases} \quad \text{OK}$$

$$\begin{cases} u(5) = 7 \\ u'(8) = 7 \end{cases} \quad \text{NO}$$

$$\begin{cases} u(5) = 7 \\ u''(5) = 8 \end{cases} \quad \text{NO deve per forza fare } u \text{ e } u'$$

In generale per un'eq. di ordine 2 le condizioni iniziali sono

$$u(t_0) = u_0$$

$$u'(t_0) = u_1$$

Per un'eq. di ordine 3 le condizioni iniziali sono del tipo

$$u(t_0) = u_0 \quad u$$

$$u'(t_0) = u_1 \quad u'$$

$$u''(t_0) = u_2 \quad u''$$

Fatto generale "Di solito" un'eq. diff. ha infinite soluzioni, e le condizioni iniziali di un problema di Cauchy permettono di determinare in maniera univoca i valori dei parametri, quindi la soluzione del problema.

TEOREMA DI ESISTENZA Consideriamo il problema di Cauchy per un'eq. diff. di ordine k in forma normale, cioè

$$u^{(k)} = \Phi(u^{(k-1)}, u^{(k-2)}, \dots, u', u, t)$$

Se Φ è continua, allora esiste almeno una soluzione.

TEOREMA DI UNICITÀ Stesse ipotesi del teorema precedente.

Supponiamo inoltre che Φ sia un po' meglio (diciamo derivabile rispetto alle varie variabili),

Allora la soluzione del problema di Cauchy è unica.

Esempio (di non unicità) Consideriamo il problema

$$\begin{cases} u' = 3|u|^{2/3} \\ u(0) = 0 \end{cases} \quad \leftarrow \text{Funzione continua, ma non derivabile in } u=0 \text{ (e nemmeno Lipschitziana vicino a 0)}$$

La funzione $u(t) \equiv 0$ è una soluzione del problema, cioè risolve l'eq. e verifica la condizione iniziale.

La funzione $u(t) = t^3$ è un'altra soluzione. Verifica $u(0) = 0$ e $u'(t) = 3t^2 = 3[u(t)]^{2/3}$

In questo caso il problema ha infinite sol. che rispettano la condizione iniziale (colpa della non Lipschitzianità di $|u|^{2/3}$).
In realtà ce ne ha pure infinite...

— 0 — 0 —