

Equazioni differenziali

Risolvere un'eq. diff. vuol dire trovare una funzione $u(t)$ che soddisfa una certa relazione che coinvolge un po' di sue derivate.

Esempi ① $\cos u(t) + \sin u'(t) = t^2 + 8$

② $u'(t) = [u(t)]^2 \rightarrow$ cercare tutte le funzioni $u(t)$ la cui derivata è uguale al quadrato della funzione stessa

③ $u''(t) + u'(t) = t^2$

Si dice ORDINE di un'eq. diff. il massimo ordine di derivazione che compare nell'eq. stessa. Negli esempi gli ordini sono: 1, 1, 2

Un'eq. diff. si dice in FORMA NORMALE se la derivata di ordine massimo "è stata ricavata rispetto al verbo". Un'eq. diff. di ordine k in forma normale si presenta dunque nella forma

$$u^{(k)}(t) = \Phi(u^{(k-1)}(t), \dots, u'(t), u(t), t)$$

L'esempio ② precedente era in forma normale.

L'esempio ③ precedente non era in forma normale, ma era facilmente riconducibile ricavando

$$u''(t) = -u'(t) + t^2$$

L'esempio ① precedente non era in forma normale, e non è possibile in generale portarlo (bisognerebbe fare arcsin, ma questo senza ipotesi non si può).

NOTAZIONE RAPIDA = non scrivere la t che solo argomento di u e delle sue derivate.

In notazione rapida gli esempi diventano

$$\cos u + \sin u' = t^2 + 8$$

$$u' = u^2$$

$$u'' + u' = t^2$$

Un'eq. diff. di ordine k in forma normale si scrive in notazione rapida come

$$u^{(k)} = \Phi(u^{(k-1)}, \dots, u', u, t)$$

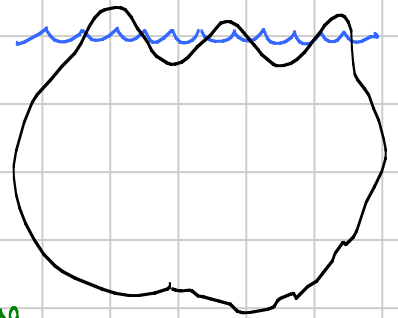
Un'eq. diff. si dice AUTONOMA se la t compare solo come argomento della u e delle sue derivate. In notazione rapida vuol dire che la t non c'è proprio.

Negli esempi precedenti: [2] è autonoma, [1] e [3] no.

Un'equazione differenziale del 1° ordine si dice a VARIABILI SEPARABILI se è in forma normale e si scrive nella forma (not. rapida)

$$u' = f(t) \cdot g(u)$$

Eq. diff. primo ordine
a VARIABILI SEPARABILI



cioè se il termine a destra è il prodotto di una funzione della sola t per una funzione della sola u .

Esempi

$$u' = t^2 \cdot \cos u$$

variabili separabili

$$u' + tu = t$$

La posso scrivere come

$$u' = -tu + t = \underbrace{t}_{f(t)} \underbrace{(1-u)}_{g(u)} \text{ e così è a variabili separabili}$$

$$u' = u^3$$

è a variabili separabili

$$u' = \underbrace{1}_{f(t)} \cdot \underbrace{u^3}_{g(u)}$$

Fatto generale. Tutte le eq. diff. del 1° ordine AUTONOME in forma normale sono in realtà a variabili separabili.

Un'eq. diff. di qualunque ordine si dice LINEARE se "la u e le sue derivate compaiono di 1° grado e non all'interno di funzioni".
Un'eq. diff. lineare di ordine k si presenta nella forma

$$a_k(t) u^{(k)} + a_{k-1}(t) u^{(k-1)} + \dots + a_1(t) u' + a_0(t) u = f(t)$$

Le funzioni $a_k(t), a_{k-1}(t), \dots, a_1(t), a_0(t)$ sono funzioni della sola variabile t , dette COEFFICIENTI dell'equazione, $f(t)$ è una funzione della sola variabile t detta termine noto (o secondo membro, o termine forzante).

Il primo membro è una COMBINAZIONE LINEARE di u e di tutte le sue derivate fino alla k -esima, con coefficienti dipendenti da t .

Un'eq. diff. lineare si dice OMOGENEA se $f(t) = 0$, e si dice NON OMOGENEA se $f(t) \neq 0$.

Un'eq. diff. lineare si dice A COEFFICIENTI COSTANTI se i coefficienti sono dei numeri e non delle funzioni della t .

- Achtung!
- ① Coefficienti costanti $\Rightarrow$ autonoma? No, perché può esserci $f(t)$ che dipende da t .
 - ② Autonoma e lineare $\Rightarrow$ coeff. costanti? Ovviamente sì.
 - ③ Autonoma $\Rightarrow$ omogenea? No, perché $f(t)$ potrebbe essere un numero $\neq 0$, ad esempio
$$u'' + 3u' + 2u = 5$$

↑ $f(t) \neq 0$ che la rende non omog.

Esempi

$u' + t^2 u = 0$	LINEARE (comb. lin. di u' e u con coeff. 1 e t^2)
$u' + t u^2 = 0$	NON LINEARE per colpa del quadrato
$u' + \cos(tu) = 0$	NON LINEARE per colpa del cos
$\cos t^2 \cdot u + e^t u' = \arctan t$	LINEARE

Equazioni lineari del 1° ordine: $a_1(t)u' + a_0(t)u = f(t)$

A meno di dividere per $a_1(t)$ (il che può richiedere che sia $\neq 0$)
l'equazione si può scrivere nella forma

$$u' + a(t)u = b(t)$$

1° ordine
lineare

Equazioni lineari di ordine qualunque a coeff. costanti, omogenee o non omogenee. In generale si scrivono nella forma

$$a_k u^{(k)} + a_{k-1} u^{(k-1)} + \dots + a_1 u' + a_0 u = f(t)$$

ordine k lineare
a coeff. costanti

dove $a_k, a_{k-1}, \dots, a_1, a_0$ sono numeri dati.

Esempi

$$u'' + 3u = \sin t$$

ordine 2 lineare a coeff. costanti

$$u' = t^2 u + \sin t$$

ordine 1 lineare a coeff. non costanti

$$u' = 7u$$

→ variabili separabili (autonoma)

→ 1° ordine lineare

→ a coeff. costanti

quindi rientra in tutte e 3 le tipologie evidenziate.

Achtung! Quando si risolve un'eq. differenziale, si intende che tra le incognite c'è anche l'insieme di partenza della $u(t)$ (si intende che l'ansio è $\mathbb{R}$).