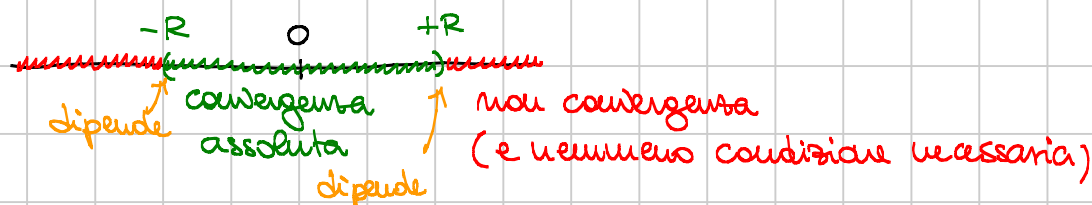


Metodi per il calcolo della somma di serie di potenze

Serie di potenze: $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$
 $\uparrow$
 coefficienti

Domande: 1 - per quali valori di x converge?
 2 - quanto fa la somma?

Teo (raggio di conv.) Esiste $R \in [0, +\infty) \cup \{+\infty\}$ t.c.



Se $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} = L$, allora $R = \frac{1}{L}$ (se il limite non esiste, R esiste comunque, ma non è dato dalla formula)

Teo (serie di Taylor) Se la serie di potenze è la serie di Taylor di una certa funzione $f(x)$ ottenuta dalle funzioni elementari facendo op. algebriche e o composizioni in zone fuori dai problemi burocratici, cioè la serie è della forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

allora la serie, per i valori di x per cui converge, ha per somma proprio $f(x)$.

Esempio 1 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots = e^x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$
 (è la serie di Taylor di e^x e ha $R = +\infty$)

Esempio 2 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{(1-x)}$ per ogni $x \in (-1, 1)$

(è una serie geometrica, oppure la serie di Taylor di $(1-x)^{-1}$)

Esempio 3 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \dots = -\log(1-x)$
per ogni $x \in [-1, 1)$

Questo dimostrava che $-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots = -\log 2$.

Teorema Sia $f(x)$ la somma di una serie di potenze, cioè

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad \text{definita per ogni } x \in (-R, R),$$

più eventualmente in $x = \pm R$

Allora "la derivata della serie è la serie delle derivate", cioè

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n c_n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}$$

↑
per $n=0$ il coeff.
sarebbe 0.

Oss. L'uguaglianza vale per ogni $x \in (-R, R)$. In particolare

- la serie di partenza e la serie delle derivate hanno lo stesso raggio di convergenza
- il comportamento negli estremi può essere diverso per le due serie.

Oss. In generale è falso che la derivata di una serie, cioè della somma di infinite funzioni, è la somma delle infinite derivate.

È vero però per le serie di potenze.

Esempio 1 La serie dell'esempio 2 è la derivata termine a termine della serie dell'esempio 3. Così la somma dell'es. 2 è la derivata della somma dell'esempio 3.

Esempio 2 $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$

Cambio x con $-x$: $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$

Cambio x con x^2 : $\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$

Se ora faccio la primitiva a dx e dx :

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

Utilizzo del teorema di derivazione

① Ho la serie $x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$ e non so calcolare la somma

② Calcolo la derivata e viene $1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots$ e di questa so che la somma è $\frac{1}{1+x^2}$

③ Allora la serie iniziale era una primitiva di $\frac{1}{1+x^2}$, cioè $\arctan x + c$.
Poiché la serie iniziale faceva 0 per $x=0$ deve essere $c=0$.

Esempio 1 $\sum_{n=1}^{\infty} n x^n = x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \dots$

$$= x (1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + \dots)$$

(teo. scambio con deriv.) $= x (x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots)'$

$$= x (-1 + \underbrace{1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots})'$$

serie esempio 2: so calcolare la somma

$$= x \left(-1 + \frac{1}{1-x} \right)'$$

$$= x \left(\frac{-1+x+1}{1-x} \right)' = x \left(\frac{x}{1-x} \right)'$$

$$= x \frac{1-x+x}{(1-x)^2} = \frac{x}{(1-x)^2}$$

Ora so che $x + 2x^2 + 3x^3 + \dots = \frac{x}{(1-x)^2}$ per ogni x per cui converge
 $x \in (-1, 1)$

In maniera formale

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^n = x \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = x \sum_{n=1}^{\infty} (x^n)' = x \left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n \right)'$$

↑
Teo. scambio

$$= x \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n - 1 \right)' = x \left(\frac{1}{1-x} - 1 \right)' = \text{semplici calcoli.}$$

↑
aggiungo e tolgo
termine con $n=0$

↑
calcolo somma di
serie nota

Esempio 2 Calcolare $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{7^n}$. La serie converge

Inoltre è il caso $x = \frac{1}{7}$ della serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n = x \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1} = x \sum_{n=1}^{\infty} (n x^n)'$$

↑
partire da
0 o 1 non cambia

$$= x \left(\sum_{n=1}^{\infty} n x^n \right)' = x \left[\frac{x}{(1-x)^2} \right]'$$

serie
dell'esempio 1

Basta ora calcolare la derivata ed il raggio di convergenza per stabilire per quali x vale l'uguaglianza.

Esempio 3 $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{n^2}{n-2} x^n$

$$\frac{n^2}{n-2} = \frac{n^2 - 2n + 2n - 4 + 4}{n-2} = n + 2 + \frac{4}{n-2}$$

Quindi $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{n^2}{n-2} x^n = \underbrace{\sum_{n=3}^{\infty} n x^n}_{\text{OK}} + 2 \underbrace{\sum_{n=3}^{\infty} x^n}_{\text{OK}} + 4 \sum_{n=3}^{\infty} \frac{x^n}{n-2}$

↓
 $x^3 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^5}{3} + \frac{x^6}{4} + \dots$

$$= x^2 \left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots \right)$$

OK