

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 088

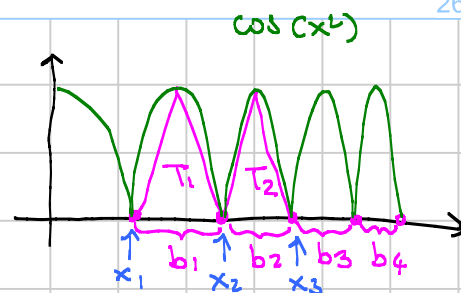
Titolo nota

26/11/2011

Back to $\int_0^{+\infty} |\cos(x^2)| dx$

$$\geq \sum_{n=1}^{\infty} \text{Area}(T_n) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \text{Base}(T_n)$$

$\uparrow$
altezza = 1



La serie $b_1 + b_2 + b_3 + \dots$ diverge perché copre tutta la semiretta dal primo p.to $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ a $+\infty$.

Metodo alternativo: indichiamo con $x_1, x_2, x_3, \dots$ i p.ti dove $\cos(x^2) = 0$. Allora $\text{Base}(T_n) = x_{n+1} - x_n$, quindi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \text{Base}(T_n) = \sum_{n=1}^{\infty} (x_{n+1} - x_n) = (\cancel{x_2} - x_1) + (\cancel{x_3} - \cancel{x_2}) + (\cancel{x_4} - \cancel{x_3}) + \dots$$

(si tratta di una serie telescopica per cui $S_n = \text{somma parziale} = x_{n+1} - x_1 \rightarrow +\infty$).

Esempio 2 $\int_0^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx = +\infty$

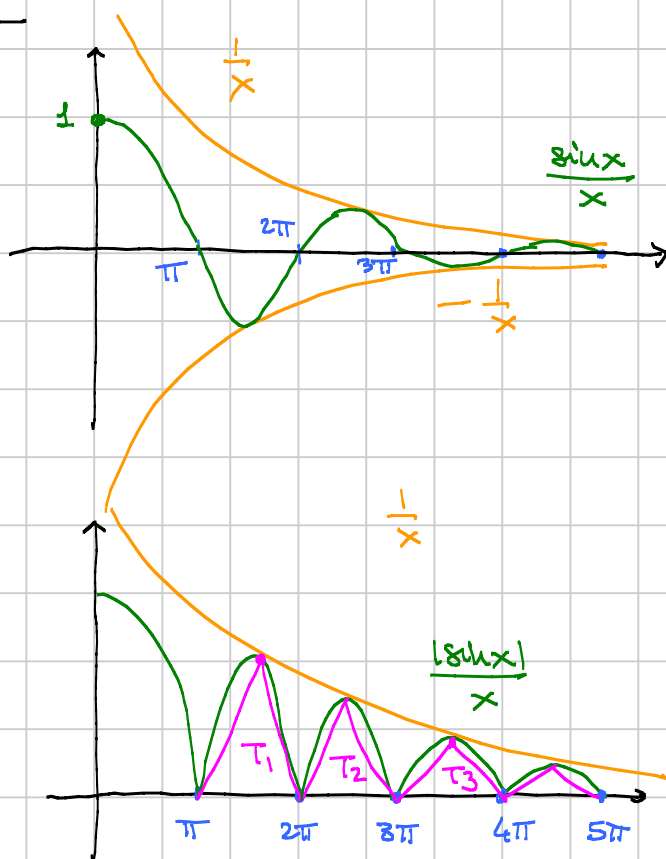
$$-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}$$

$$\frac{\sin x}{x} = 0 \Leftrightarrow x = k\pi \text{ con } k \geq 1$$

Come prima

$$\int_0^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx = \text{somma aree "colline"}$$

$$\geq \sum_{n=1}^{\infty} \text{Area}(T_n)$$



Ora tutte le basi sono π

Le altezze sono il valore della funzione nel p.to medio della base

La base di T_n ha come estremi $n\pi$ e $(n+1)\pi$, quindi il p.to medio della base di T_n è $n\pi + \frac{\pi}{2}$, quindi il valore della funzione è

$$\frac{|\sin(n\pi + \frac{\pi}{2})|}{n\pi + \frac{\pi}{2}} = \frac{1}{n\pi + \frac{\pi}{2}} = \frac{2}{2n\pi + \pi} = \text{altezza di } T_n$$

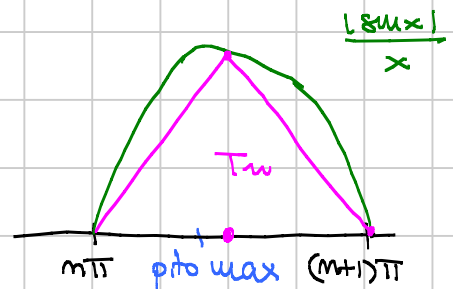
quindi

$$\text{Area}(T_n) = \frac{1}{2} \text{base}(T_n) \cdot \text{altezza}(T_n) = \frac{1}{2} \pi \frac{2}{2n\pi + \pi} = \frac{\pi}{2n\pi + \pi}$$

$$\text{Quindi } \sum_{n=1}^{\infty} \text{Area}(T_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{2n\pi + \pi} = +\infty$$

↓
termine generale $\sim \frac{1}{n}$

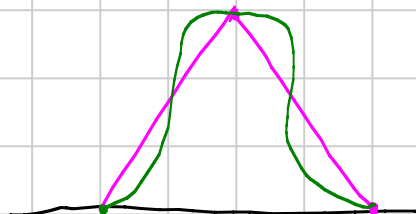
Oss. Il p.to centrale della base è il p.to di max della funzione in quell' intervallo?
Assolutamente NO!



$\left(\frac{\sin x}{x}\right)' = \frac{\cos x \cdot x - \sin x}{x^2}$. Quindi nel centro della base abbiamo che $\cos x = 0$, $\sin x = \pm 1$, quindi di sicuro non è il p.to di max.

Il p.to di max viene un po' prima del centro (a parità di valore di $\sin x$, conviene dividere per un x più piccolo).

Oss. Per il metodo dei triangolini è fondamentale solo sapere che la funzione sta sopra il triangolo nella zona in questione. Questo nei 2 esempi precedenti non è stato dimostrato...
Poteva succedere una cosa del genere



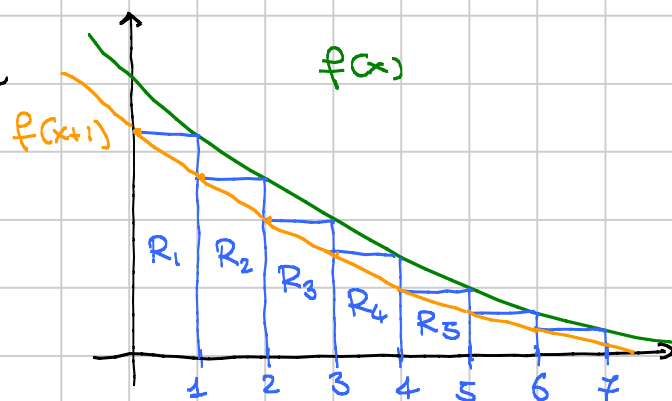
METODO DEI TRIANGOLINI: le serie aiutano gli integrali

CONFRONTO SERIE - INTEGRALI gli integrali aiutano le serie.

Prendiamo $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

- $f(x) \geq 0$ per ogni $x \geq 0$
- f è debolmente decrescente

Come prima



$$\int_0^{+\infty} f(x) dx \geq \sum_{n=1}^{\infty} \text{Area}(R_n) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

$$\text{Area}(R_n) = \underset{1}{\text{base}} \cdot \underset{f(n)}{\text{altezza}}$$

Analogamente

$$\int_0^{+\infty} f(x+1) dx \leq \sum_{n=1}^{\infty} \text{Area}(R_n) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

Ora

$$\int_0^{+\infty} f(x+1) dx = \int_1^{+\infty} f(x) dx$$

Questo si vede: $\rightarrow$ o con il cambio di variabili $y = x+1$

$\rightarrow$ o osservando che prendendo l'area che rappresenta il 1° integrale e traslandola a dx di 1 si ottiene l'area che rappresenta il 2° integrale.

Abbiamo così dimostrato che

$$\int_1^{+\infty} f(x) dx \leq \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \leq \int_0^{+\infty} f(x) dx$$

area sotto $f(x+1)$ area triangoli area sotto $f(x)$

Confronto serie - integrali

Analogamente se $f: [M, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ con $M \in \mathbb{N}$ ho che

$$\int_{M+1}^{+\infty} f(x) dx \leq \sum_{n=M+1}^{+\infty} f(n) \leq \int_M^{+\infty} f(x) dx$$

Questo permette di dedurre il comportamento della serie da quello dell'integrale improprio, cioè

- se l'integrale improprio di $f(x)$ con problema a $+\infty$ converge, allora la serie di $f(n)$ converge (uso disuguaglianza di dx)
- se l'integrale improprio di $f(x)$ con problema a $+\infty$ diverge, allora la serie di $f(n)$ diverge (uso disuguaglianza di dx).

Esempio classico Le serie armoniche generalizzate si comportano come i rispettivi integrali impropri.
Gli integrali si sanno studiare, quindi anche le serie.

Oss. Dove ho usato che $f(x)$ è debolmente decrescente?

Nel dire che i rettangoli stanno sotto $f(x)$ e sopra $f(x+1)$, cioè questo non succede

