

Trucco dell'integrazione per parti

Esempio 1 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx$ Due problemi: a 0 e a $+\infty$

$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx$ Integranda ha segno variabile, quindi studio $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x^2} dx$

Poichè $\frac{|\sin x|}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}$ per ogni $x \geq 1$, abbiamo che

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx \text{ converge} \Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x^2} dx \Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx$$

↑
confronto classico
tra integrande ≥ 0
↑
Assoluta
integrabilità

Oss. Stesso discorso se cambio x^2 con x^α purchè $\alpha > 1$.

$\int_0^1 \frac{\sin x}{x^2} dx$ integranda ≥ 0 nella zona $x \in [0, 1]$ Brutale: $\frac{\sin x}{x^2} \sim \frac{1}{x}$
quindi diverge.

Esempio 2 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ L'unico problema è a $+\infty$ perchè in 0 la funzione tende ad $\pm$, quindi è limitata in un intorno di 0. Volendo

$\sin x \leq x$ per ogni $x > 0$, quindi $\frac{\sin x}{x} \leq 1$ per ogni $x > 0$

L'integranda è a segno variabile, quindi puoi provare con l'assoluta int.

$\int_0^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx$, poi dico che $\frac{|\sin x|}{x} \leq \frac{1}{x}$, ma $\int \frac{1}{x} dx$ con problema a $+\infty$ diverge, quindi BOH.

Vedremo successivamente che $\int_0^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx = +\infty$, quindi ancora BOH.

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \underbrace{\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx}_{\text{NUMERO}} + \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx \quad \text{Basta studiare il 2o}$$

definizione

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_1^A \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_1^A \underbrace{\sin x}_g \cdot \underbrace{\frac{1}{x}}_F dx =$$

$$= \lim_{A \rightarrow +\infty} \left\{ \underbrace{\left[-\cos x \cdot \frac{1}{x} \right]}_{GF} \Big|_1^A - \int_1^A \underbrace{(-\cos x)}_G \underbrace{\left(-\frac{1}{x^2} \right)}_F dx \right\}$$

$$= \lim_{A \rightarrow +\infty} \left\{ \underbrace{\frac{-\cos A}{A}}_0 + \underbrace{\frac{\cos 1}{1}}_{\frac{\cos 1}{1}} - \int_1^A \frac{\cos x}{x^2} dx \right\} = \cos 1 - \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx$$

Ho ancora un integrale improprio, ma ho x^2 al denominatore. Quindi come nell'esempio 1:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx \text{ converge} \Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{|\cos x|}{x^2} dx < +\infty \Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx \text{ converge}$$

$\uparrow$
 $\frac{|\cos x|}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}$ + confronto classico

$\uparrow$
 Assoluta integrabilità

Conclusione

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \cos 1 - \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx}_{\text{converge}} = \text{Numero.}$$

Nota bene Vedremo che $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx = +\infty$, ma $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ converge

— 0 — 0 —

Esempio 3 $\int_0^{+\infty} \cos(x^2) dx$

L'integranda è limitata, quindi l'unico problema è a $+\infty$. L'integranda ha segno variabile.

Vedremo più avanti che

$$\int_0^{+\infty} |\cos(x^2)| dx = +\infty, \text{ quindi BOH sul precedente}$$

Come prima abbiamo che

$$\int_0^{+\infty} \cos(x^2) dx = \underbrace{\int_0^1 \cos(x^2) dx}_{\text{Numero}} + \underbrace{\int_1^{+\infty} \cos(x^2) dx}_{\text{studio solo questo}}$$

$$\int_1^{+\infty} \cos(x^2) dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_1^A \cos(x^2) dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_1^A \underbrace{\frac{1}{x}}_F \cdot \underbrace{x \cos(x^2)}_g dx$$

$$= \lim_{A \rightarrow +\infty} \left\{ \left[\underbrace{\frac{1}{x}}_F \underbrace{\frac{1}{2} \sin(x^2)}_G \right]_1^A - \int_1^A \underbrace{\left(-\frac{1}{x^2}\right)}_f \underbrace{\frac{1}{2} \sin(x^2)}_G dx \right\}$$

$$= \lim_{A \rightarrow +\infty} \left\{ \underbrace{\frac{\sin(A^2)}{2A}}_{\downarrow 0} - \frac{\sin 1}{2} + \frac{1}{2} \int_1^A \frac{\sin(x^2)}{x^2} dx \right\}$$

$$= -\frac{1}{2} \sin 1 + \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \frac{\sin(x^2)}{x^2} dx$$

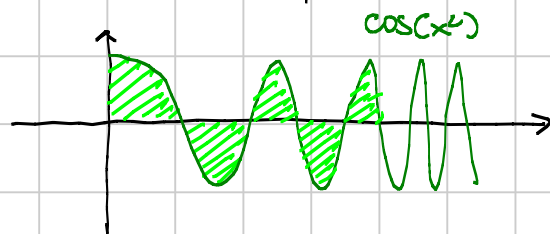
Come prima $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin(x^2)|}{x^2} dx$ converge (per $\frac{1}{x^2}$ sotto), quindi

$\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x^2)}{x^2} dx$ converge (assoluta integrabilità), quindi l'integrale di partenza converge.

Oss. Con lo stesso metodo si dimostra che $\int_0^{+\infty} \cos(x^\alpha) dx$ e $\int_0^{+\infty} \sin(x^\alpha) dx$ convergono per ogni $\alpha > 1$

(Esercizio: dimostrarlo moltiplicando e dividendo per $x^{\alpha-1}$)

Oss. La funzione $\cos(x^2)$ è oscillante e non tende a 0 per $x \rightarrow +\infty$



Questo dice che per gli integrali impropri non vale l'analogo della condizione necessaria per le serie, cioè

può accadere che $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ converge, ma $f(x) \not\rightarrow 0$ per $x \rightarrow +\infty$ (può accadere che $f(x)$ non ha limite)

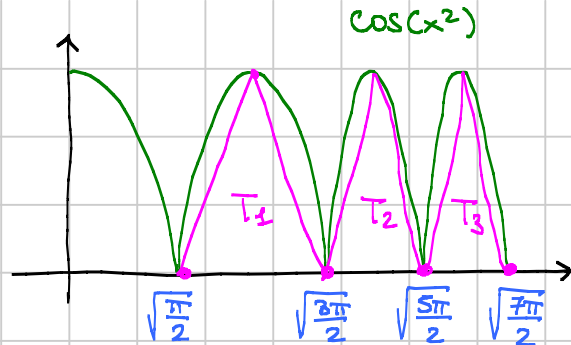
Oss. Quando vediamo che $\int_0^{+\infty} |\cos(x^2)| dx = +\infty$ avremo che

- la somma di tutte le aree con il segno + diverge
- la somma delle aree a segno alterno converge

Dimostrazione che $\int_0^{+\infty} |\cos(x^2)| dx = +\infty$

$$\int_0^{+\infty} |\cos(x^2)| dx \geq \text{somma aree triangolini}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \text{Area}(T_n)$$



Ogni T_n ha altezza 1. Chi è la base? Bisogna trovare i pti dove $\cos(x^2) = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{\pi}{2} + n\pi \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{\pi}{2} + n\pi}$

Il triangolo T_n ha come base il segmento $\left[\sqrt{\frac{(2n-1)\pi}{2}}, \sqrt{\frac{(2n+1)\pi}{2}} \right]$

Quindi il triangolo T_n ha la base lunga $\sqrt{\frac{(2n+1)\pi}{2}} - \sqrt{\frac{(2n-1)\pi}{2}}$, quindi

$\text{Area}(T_n) = \frac{1}{2} \text{base} \cdot \text{altezza} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\dots} - \sqrt{\dots} \right)$, quindi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \text{Area}(T_n) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left(\sqrt{\frac{(2n+1)\pi}{2}} - \sqrt{\frac{(2n-1)\pi}{2}} \right)}_{a_n}$$

$$\text{Brutale: } \sqrt{\dots} - \sqrt{\dots} = \frac{\sqrt{\dots} + \sqrt{\dots}}{\sqrt{\dots} + \sqrt{\dots}} = \frac{\frac{(2n+1)\pi}{2} - \frac{(2n-1)\pi}{2}}{\sqrt{\dots} + \sqrt{\dots}} \sim \frac{\pi}{\sqrt{n}}$$

Quindi poiché $a_n \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$, la serie diverge (raggiro: C.A. con $\frac{1}{\sqrt{n}}$)

Ma allora $\int_0^{+\infty} |\cos(x^2)| dx \geq \text{serie aree} = +\infty$, quindi diverge.