

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 086

Titolo nota

25/11/2011

Esempio 1 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2 \log x} dx$

Problemi in $x = +\infty$ e anche in $x = 1$.

Per il resto integrandola $f(x) \geq 0$.

$$\int_1^{+\infty} = \int_1^3 + \int_3^{+\infty}$$

Per l'integrale in $[3, +\infty)$ osserviamo che $\frac{1}{x^2 \log x} \leq \frac{1}{x^2 \log 3}$
denominatore + piccolo

$$\int_3^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx < +\infty \Rightarrow \int_3^{+\infty} \frac{1}{x^2 \log x} dx < +\infty$$

Per l'integrale in $[1, 3]$ riporto il problema in 0:

pongo $y = x - 1$, da cui $dy = dx$. Quando $x = 1$ ho che $y = 0$
 " $x = 3$ " " $y = 2$

$$\int_1^3 \frac{1}{x^2 \log x} dx = \int_0^2 \frac{1}{(y+1)^2 \log(1+y)} dy$$

In $y = 0$ l'integrale è improprio per colpa di $\log(1+y) \sim y$, quindi

Brutale: $f(y) = \frac{1}{(y+1)^2 \log(1+y)} \sim \frac{1}{1 \cdot y}$

Quindi facciamo il confronto asintotico con $g(x) = \frac{1}{y}$

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{f(y)}{g(y)} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\boxed{y}}{\boxed{(y+1)^2} \log(1+y)} = 1 \neq 0 \neq +\infty$$

$\downarrow$ $\downarrow$
1 1

Quindi l'integrale diverge.

$$\int_1^{+\infty} = \underbrace{\int_1^3}_{+\infty} + \underbrace{\int_3^{+\infty}}_{\text{converge}} = +\infty$$

Metodo alternativo per l'integrale in $[1, 3]$. Confronto $f(x) = \frac{1}{x^2 \log x}$ con $g(x) = \frac{1}{x-1}$. Calcolo

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{x^2 \log x} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{y}{(y+1)^2 \log(1+y)} = 1 \neq 0 \neq \pm \infty$$

$\uparrow$
 $y = x-1$

$\uparrow$
p.to in cui c'è il problema

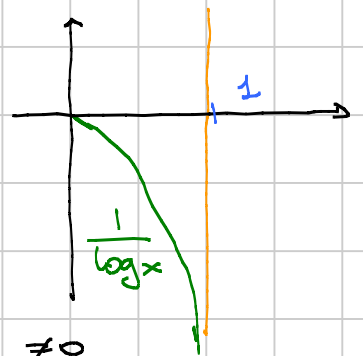
Quindi l'integrale di $\frac{1}{x^2 \log x}$ con problema in 1 si comporta come l'int. di $\frac{1}{x-1}$ con problema in 1, quindi diverge.

Esempio 2 $\int_0^1 \frac{1}{\log x} dx$ C'è il problema in 1 perché $f(x)$ non è limitata. Quando $x \rightarrow 0^+$ abbiamo che $f(x) \rightarrow 0^-$, quindi $f(x)$ è limitata vicino a 0, quindi in $x=0$ non ci sono problemi

L'unico problema è in $x=1$.

Inoltre $f(x) \leq 0$ nell'intervallo, quindi posso usare i criteri per integrande a segno cost.

Confronto asintotico con $g(x) = \frac{1}{x-1}$



$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x-1}{\log x} = \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{y}{\log(1+y)} = 1 \neq 0 \neq \pm \infty$$

$\uparrow$
 $y = x-1$

Quindi si comporta come $\int \frac{1}{x-1} dx$ con problema in 1, quindi diverge a $-\infty$.

Esempio 3 $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} dx$ si può fare usando la definizione ($\alpha > 0$)

$$= \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A e^{-\alpha x} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha x} \right]_0^A = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha A} + \frac{1}{\alpha} \right) = \frac{1}{\alpha}$$

$\downarrow$
0

quindi converge per ogni $\alpha > 0$.

Conseguenza: $\int_0^{+\infty} 2^{-x} dx = \int_0^{+\infty} e^{-\log 2 \cdot x} dx = \frac{1}{\log 2}$, quindi converge

(posso sostituire 2 con un qualunque reale > 1)

Esempio 4 $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$ Confronto asintotico con $g(x) = e^{-x}$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x^2}}{e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x-x^2} = [e^{-\infty}] = 0$$

Caso limite: per x grandi $\frac{e^{-x^2}}{e^{-x}} \leq 1$, cioè $e^{-x^2} \leq e^{-x}$, quindi

$\int_0^{+\infty} e^{-x} dx$ converge e dunque anche $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$ converge

Esempio 5 $\int_0^{+\infty} x^{20} e^{-x} dx$ Brutale: e^{-x} farebbe convergere, x^{20} rema contro, ma probabilmente più poco contro l'esponenziale.

Se faccio il confronto asintotico con e^{-x} va male (provare!). Provo allora con $g(x) = e^{-x/2}$ oppure $g(x) = \frac{1}{x^2}$.

Calcolo

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{22} e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{22}}{e^x} = 0 \text{ caso limite}$$

Quindi $\frac{f(x)}{g(x)} \leq 1$ per x grandi, cioè $f(x) \leq g(x)$, quindi converge.

Esempio 6 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^4-1}} dx$ Problemi in $x=1$ e $x=+\infty$.

Problema a $+\infty$ Brutale: $f(x) \sim \frac{1}{\sqrt{x^4}} = \frac{1}{x^2}$ quindi converge

Problema in 1 Brutale: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{(x^2+1)(x+1)(x-1)}}$

quindi $f(x) \sim \frac{1}{\sqrt{x-1}}$, quindi converge

COLPEVOLE DELL'IMPROPRIETÀ

Rigoroso: confronto asintotico con $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{\sqrt{(x^2+1)(x+1)(x-1)}} \cdot \sqrt{x-1} = \frac{1}{2} \neq 0 \neq +\infty$$

Quindi l'integrale si comporta come $\int \frac{1}{\sqrt{x-1}} dx$ con problema in $x=1$, dunque converge.

Esempio 7 $\int_0^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^7+7x^2+1} dx$ converge perché $f(x) \sim \frac{1}{x^5}$

Esempio 8 $\int_0^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^7+7x^2-1} dx$ Ora il denominatore si annulla almeno una volta in $[0, +\infty)$
Infatti in $x=0$ ho denum. $= -1$

per $x \rightarrow +\infty$ ho denum. $\rightarrow +\infty$

Quante volte si annulla? Denominatore' $= 7x^6 + 14x > 0$ per $x > 0$
quindi il denominatore è strett. crescente, quindi si annulla in un unico valore $\alpha > 0$ che non riesco a trovare...

$$\int_0^{+\infty} = \int_0^{\alpha} + \int_{\alpha}^{\alpha+3} + \int_{\alpha+3}^{+\infty}$$

converge per confronto asint. con $\frac{1}{x^5}$

Per l'integrale in $[\alpha, \alpha+3]$ uso il confronto asintotico con $g(x) = \frac{1}{x-\alpha}$
Devo calcolare

$$\lim_{x \rightarrow \alpha^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \alpha^+} \frac{(x^2+1)}{x^7+7x^2-1} (x-\alpha) = \lim_{x \rightarrow \alpha^+} \frac{(x^2+1)(x-\alpha)}{x^7+7x^2-1}$$

$$\left[\frac{0}{0} : \text{H\ddot{o}p} \right] = \lim_{x \rightarrow \alpha^+} \frac{2x}{7x^6+14x} = \frac{2\alpha}{7\alpha^6+14\alpha} \neq 0 \neq +\infty$$

Quindi si comporta come $\int \frac{1}{x-\alpha} dx$ con problema in α .