

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 085

Titolo nota

25/11/2011

Esempio 1 $\int_0^1 \frac{1}{\sin x} dx$
 $f(x)$
 Integrale con unico problema in $x=0$ e integranda $f(x) \geq 0$, anzi $f(x) > 0$ (perché $\sin x > 0$ per ogni $x \in (0, 1]$)

Brutale: $f(x) \sim \frac{1}{x}$, quindi l'integrale diverge.

Rigoroso: confronto asintotico con $g(x) = \frac{1}{x}$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sin x} \cdot x = 1 \neq 0 \neq \pm \infty \dots$$

Esempio 2 $\int_0^1 \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx$

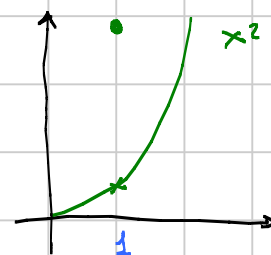
Da non pensare nemmeno: $\sin \frac{1}{x} \sim \frac{1}{x}$, quindi diverge
 questa vale quando l'argomento di $\sin$ tende a 0, e qui non succede

Achtung! La zona di integrazione è $[0, 1]$, quindi limitata
 $-1 \leq \sin \frac{1}{x} \leq 1$ per ogni $x > 0$, quindi l'integranda è limitata

Quindi si tratta di un integrale proprio, che quindi converge per forza (in realtà bisognerebbe dimostrare che è integrabile, ma questa è una finetza)

Osservazione L'integrale se ne frega del valore di una funzione in un singolo pto. Se pongo

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \neq 1 \\ 15 & \text{se } x = 1 \end{cases}$$



$$\int_0^2 f(x) dx = \int_0^2 x^2 dx \quad (\text{esercizio: dimostrarlo per bene!})$$

Esempio 3 $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(x^3)}{x^2} dx$

Apparentemente ci sono problemi in 0 e $+\infty$

$$\int_0^{+\infty} = \int_0^1 + \int_1^{+\infty}$$

Per il problema uso che

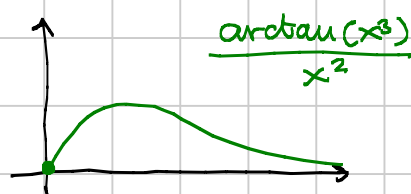
$$\frac{\arctan(x^3)}{x^2} \leq \frac{30}{x^2} \quad \text{e ottengo che converge}$$

Per il problema in 0 abbiamo che $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(x^3)}{x^2} = 0$,

quindi la funzione è limitata vicino all'origine, quindi il problema in $x=0$ non esiste e l'integrale originario era in realtà un problema.

Altro modo di dirlo

$$\int_0^1 \frac{\arctan(x^3)}{x^2} dx \quad \text{è un integrale proprio}$$



Absoluta integrabilità

Se $\int_E |f(x)| dx$ converge, allora $\int_E f(x) dx$ converge

Se $\int_E |f(x)| dx = +\infty$, allora both, nel senso che restano aperte le 4 possibilità per $\int_E f(x) dx$.

Esempio 4 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x^2)}{x^3} dx$ Problemi in 0 e a $+\infty$

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x^2)}{x^3} dx$$

$$\frac{\sin(x^2)}{x^3} \leq \frac{1}{x^3}$$

quindi l'integrale dato converge per confronto classico

NO!!!! Il confronto classico si può usare solo per integrande ≥ 0 e $\sin(x^2)$ non ha un segno fisso quando $x \rightarrow +\infty$.

$$\frac{|\sin(x^2)|}{x^3} \leq \frac{1}{x^3} \quad \text{per ogni } x > 0. \quad \text{Allora}$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx < +\infty \quad \Rightarrow \quad \int_1^{+\infty} \frac{|\sin(x^2)|}{x^3} dx < +\infty \quad \Rightarrow \quad \int_1^{+\infty} \frac{\sin(x^2)}{x^3} dx \text{ conv.}$$

tabellina

confronto classico tra integrande ≥ 0

Absoluta integrabilità

$$\int_0^1 \frac{\sin(x^2)}{x^3} dx$$

Ora l'integrande ha segno ≥ 0 vicino al problema, anzi in tutto l'intervallo. Quindi uso i criteri per integrande positive, cioè il conf. asint. con $g(x) = \frac{1}{x}$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(x^2)}{x^3} \cdot x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(x^2)}{x^2} = 1 \neq 0 \neq +\infty$$

Quindi l'integrale dato si comporta come l'int. di $\frac{1}{x}$ con problema in 0, quindi diverge.

Conclusione: l'integrale iniziale diverge.

Esempio 3 $\int_0^{+\infty} \frac{\log(3+x^2)}{3+x^2} dx$
 $f(x)$

Integrande $f(x) \geq 0$
 Unico problema a $+\infty$.

Brutale: $f(x) \sim \frac{\log x^2}{x^2} \sim \frac{2 \log x}{x^2}$

Ora x^2 è buono per convergenza, $\log x$ "reuma contro", ma non riesce a contrastare x^2

Rigoroso: confronto asintotico con $g(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ con $\alpha \in (1, 2)$, ad esempio $\alpha = \frac{3}{2}$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{\frac{1}{x^{3/2}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(3+x^2)}{3+x^2} \cdot x\sqrt{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log[x^2(1+\frac{3}{x^2})]}{x^2(1+\frac{3}{x^2})} \cdot x\sqrt{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \frac{2 \log x + \log(1+\frac{3}{x^2})}{1+\frac{3}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \underbrace{\frac{2 \log x}{\sqrt{x}}}_{\substack{\downarrow 0 \\ \text{potenze vs} \\ \text{logaritmi}}} \underbrace{\frac{1}{1+\frac{3}{x^2}}}_{\downarrow 1} + \underbrace{\frac{\log(1+\frac{3}{x^2})}{\sqrt{x}(1+\frac{3}{x^2})}}_{\substack{\downarrow +\infty \\ \text{0}}}$$

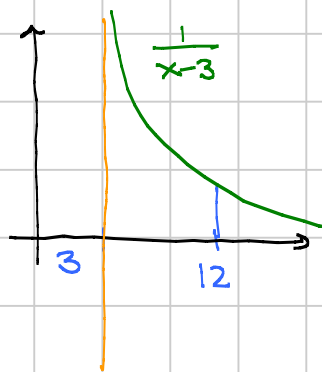
= 0 caso limite

[quindi $\frac{f(x)}{g(x)} \leq 1$ vicino al problema, cioè per x sufficientemente grandi, quindi $f(x) \leq g(x)$ per x grandi, quindi]

L'integrale dato si comporta come $\int \frac{1}{x^{3/2}} dx$ con problema a $+\infty$, cioè converge.

Cosa succede se il problema è in $x_0 \neq 0$.

Esempio 6 $\int_3^{12} \frac{1}{x-3} dx$ problema in $x_0 = 3$



Idea: riportare il problema in 0 mediante un cambio di variabili

Pongo $y = x-3$, quindi $dy = dx$. Cambio gli estremi
quando $x=3$ ho che $y=0$, quando $x=12$ ho che $y=9$

Quindi $\int_3^{12} \frac{1}{x-3} dx = \int_0^9 \frac{1}{y} dy$, quindi diverge

Oss. La formula di integrazione per sostituzione valebbe solo sugli integrali propri...

Tuttavia si può estendere a quelli impropri usando la definizione e facendo la sostituzione u fisso.

Fatto generale

$$\int_{x_0}^{x_0+a} \frac{1}{(x-x_0)^\alpha} dx \quad \begin{array}{l} \nearrow \text{converge se } \alpha < 1 \\ \searrow \text{diverge a } +\infty \text{ se } \alpha \geq 1 \end{array}$$

$$\int_{x_0-a}^{x_0} \frac{1}{|x-x_0|^\alpha} dx \quad \begin{array}{l} \nearrow \text{converge se } \alpha < 1 \\ \searrow \text{diverge a } +\infty \text{ se } \alpha \geq 1 \end{array}$$

Tabellina.