

Studio della convergenza di integrali impropri monoproblema

$$\int_E f(x) dx \quad E = \text{zona di integrazione}$$

Integrandi $f(x)$ a segno costanteIntegrandi $f(x)$ a segno variabile

Criterio del confronto

Criterio assoluta integrab.

Criterio del confronto asintotico

↗ casi standard
↘ casi limite

Notazione. Per gli integrali monoproblema dico che

- il problema è a $+\infty$ se $E = [a, +\infty)$ e $f(x)$ è limitata
- " " $-\infty$ se $E = (-\infty, a]$ " "
- il problema è in $x_0 = a$ se $E = [a, b]$ e $f(x)$ non è limitata nell'intorno di a
- idem se il problema è in b .

Fatto importante Se $f(x) \geq 0$ in un intorno del problema, allora
 l'integrale improprio monoproblema può solo
 * convergere,
 * divergere a $+\infty$.

Criterio del confronto

$$\int_E f(x) dx \quad \int_E g(x) dx$$

Supponiamo che $0 \leq f(x) \leq g(x)$ per ogni $x \in E$ (ma basta che sia per ogni $x \in E$ in un intorno del problema). Allora

$$\int_E g(x) dx < +\infty \text{ (cioè converge)} \Rightarrow \int_E f(x) dx < +\infty$$

$$\int_E f(x) dx = +\infty \Rightarrow \int_E g(x) dx = +\infty$$

Achtung! Tutte le altre implicazioni sono in generale false.

Criterio del confronto asintotico Supponiamo $f(x) \geq 0$ e $g(x) > 0$

Casi standard Supponiamo che $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l \neq 0, \neq +\infty$

↓
p.to in cui c'è il problema

Allora l'integrale improprio di $f(x)$ e quello di $g(x)$, con unico problema in x_0 , hanno lo stesso comportamento, cioè uno converge se e solo se converge l'altro.

Casi limite Supponiamo che $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

[Allora $\frac{f(x)}{g(x)} \leq 1$ vicino al problema, quindi $f(x) \leq g(x)$ vicino al problema (ho usato che $g(x) > 0$ per moltiplicare conservando i versi), quindi per confronto standard]

$$\int_E g(x) dx < +\infty \Rightarrow \int_E f(x) dx < +\infty ; \quad \int_E g(x) dx = +\infty \Rightarrow \text{BOH}$$

Supponiamo che $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$ [Allora $\frac{f(x)}{g(x)} \geq 1$ vicino ad x_0
quindi $f(x) \geq g(x)$
quindi]

$$\int_E g(x) = +\infty \Rightarrow \int_E f(x) = +\infty ; \quad \int_E g(x) dx < +\infty \Rightarrow \text{boh.}$$

Achtung! Questi criteri valgono per integrande ≥ 0 e per integrali con un unico problema.

Esempio 1

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = \underbrace{\int_0^1 \frac{1}{x^2} dx}_{\text{diverge a } +\infty \text{ perché } \alpha = 2 \geq 1} + \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx}_{\text{converge perché } \alpha = 2 > 1} = +\infty$$

Oss. $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$ questo diverge per ogni $\alpha > 0$ perché ogni α "va male" a 0 oppure a $+\infty$ ($\alpha=1$ va male in tutti e 2 i casi)

Esempio 2 $\int_0^{+\infty} \underbrace{\frac{2x+3}{x^3+7}}_{f(x)} dx$ Volendo si potrebbe usare la definizione, ma occorre fare la primitiva

In alternativa: $f(x) \geq 0$, quindi applico i criteri

Brutale: $f(x) \sim \frac{2x}{x^3} \sim \frac{1}{x^2}$

Quindi l'integrale dato si comporta come $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$, quindi diverge

ASSOLUTAMENTE NO!!!!

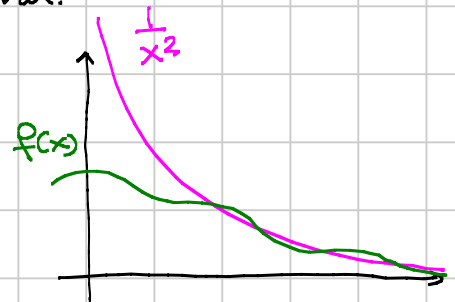
L'integrale dato ha come unico problema $+\infty$ (la funzione è limitata perché il denominatore non si annulla). Faccio il confronto con $g(x) = \frac{1}{x^2}$. Devo fare

$$\lim_{x \rightarrow \boxed{+\infty}} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+3}{x^3+7} \cdot x^2 = 2 \neq 0 \neq +\infty$$

p.to in cui ho il problema

Quindi l'integrale improprio di $f(x)$, con unico problema a $+\infty$, si comporta come l'integrale improprio di $g(x)$, con unico problema a $+\infty$. Ora l'integrale di $\frac{1}{x^2}$ con problema a $+\infty$ converge, quindi converge quello di partenza.

Geometricamente: $f(x)$ e $g(x)$ si "assomigliano" per x grandi. Invece $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ diverge per colpa del comportamento in $x=0$, dove $f(x)$ e $g(x)$ non si assomigliano.



Esempio 3 $\int_0^{+\infty} \frac{x+7}{x^2+3x+1} dx$ $f(x) \geq 0$ per ogni $x \geq 0$

$f(x) \sim \frac{1}{x}$, quindi l'integrale dato si comporta come $\int \frac{1}{x} dx$ con problema a $+\infty$, quindi diverge.

Esempio 4 $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^3+\sqrt{x}} dx$ Ci sono 2 problemi: a 0 e a $+\infty$

$$\underbrace{\int_0^1 \frac{1}{x^3+\sqrt{x}} dx}_{\text{converge}} + \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3+\sqrt{x}} dx}_{\text{converge}}$$

L'integrale con problema a $+\infty$ converge per confronto asintotico con $\frac{1}{x^3}$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{\frac{1}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^3+\sqrt{x}} \cdot x^3 = 1 \neq 0 \neq +\infty$$

L'integrale con problema a 0 converge per conf. asint. con $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^3+\sqrt{x}} \cdot \sqrt{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2\sqrt{x}+1} = 1 \neq 0 \neq +\infty$$

Quindi l'int. improprio di $f(x)$ con problema a 0 si comporta come l'int. improprio di $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ con problema a 0, quindi converge.

Esempio 5 $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{x\sqrt{x}} dx$ Problemi in 0 e $+\infty$

$$\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x\sqrt{x}} dx \quad \text{Confronto classico} \quad \frac{\arctan x}{x\sqrt{x}} \leq \frac{122}{x\sqrt{x}} = \frac{122}{x^{3/2}}$$

L'integrale di $\frac{1}{x^{3/2}}$ con problema a $+\infty$ converge ($\frac{3}{2} > 1$), quindi converge anche quello dato.

Per il problema in 0 $\frac{\arctan x}{x\sqrt{x}} \sim \frac{x}{x\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$, quindi converge.

Rigoroso: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\arctan x}{x\sqrt{x}} \cdot \sqrt{x} = 1 \neq 0 \neq +\infty$ quindi...