

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 083

Titolo nota

24/11/2011

Problema: stabilire se un integrale improprio converge o no senza usare la definizione (primitiva + limite)

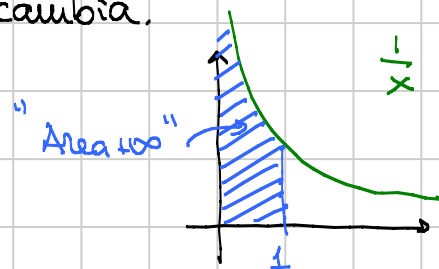
Esempio 1 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx = +\infty$ (fatto prima)

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{x} dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{x} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} [\log x]_{\varepsilon}^1 \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (\log 1 - \log \varepsilon) = +\infty \end{aligned}$$

$\begin{matrix} 0 & & -\infty \end{matrix}$

Oss. In entrambi gli esempi posso sostituire l'estremo 1 con qualunque numero $a > 0$ e l'esito non cambia.

Brutalmente, se sostituisco 1 con a , quello che cambia è l'integrale tra 1 e a (oppure tra a e 1), che in ogni caso è una quantità finita.



Esempio 2 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$ con $\alpha \neq 1$ (perché $\alpha = 1$ l'abbiamo fatto)

$$= \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_1^A \frac{1}{x^\alpha} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{-\alpha+1} \frac{1}{x^{\alpha-1}} \right]_1^A$$

$$= \lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{1}{-\alpha+1} \left(\frac{1}{A^{\alpha-1}} - 1 \right) \quad \text{Quanto fa il limite?}$$

* Se $\alpha > 1$, allora $\lim_{A \rightarrow +\infty} \dots = \frac{1}{\alpha-1}$ che è un numero, quindi l'integrale converge

* Se $\alpha < 1$, allora $\lim_{A \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{-\alpha+1} \left(\frac{1}{A^{\alpha-1}} - 1 \right) \right] = +\infty$, dunque l'integrale diverge a $+\infty$.

$\begin{matrix} \downarrow & & \downarrow \\ \text{costante} > 0 & & +\infty \end{matrix}$

Conclusione

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx = \begin{cases} \nearrow \text{converge se } \alpha > 1 \\ \searrow \text{diverge a } +\infty \text{ se } \alpha \leq 1 \end{cases}$$

Tabellina

Oss. Non cambia nulla se sostituisco l'estremo di integrazione 1 con qualunque altro estremo $a > 0$ (lo spantiacque è sempre $\alpha = 1$).

Esercizio Dimostrare che

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x [\log x]^\alpha} dx = \begin{cases} \nearrow \text{converge se } \alpha > 1 \\ \searrow \text{diverge a } +\infty \text{ se } \alpha \leq 1 \end{cases}$$

Idea: fare la primitiva ponendo $y = \log x$, da cui $dy = \frac{1}{x} dx$.

Esempio 3 $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx$ (stessa integranda di prima, ma ora il problema è in $x=0$) sempre con $\alpha \neq 1$.

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_\varepsilon^1 \frac{1}{x^\alpha} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[\frac{1}{-\alpha+1} \frac{1}{x^{\alpha-1}} \right]_\varepsilon^1$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{-\alpha+1} \left(1 - \frac{1}{\varepsilon^{\alpha-1}} \right).$$

* Se $\alpha > 1$, allora $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{-\alpha+1} \left(1 - \frac{1}{\varepsilon^{\alpha-1}} \right) = +\infty$

$\downarrow$ numero negativo $\downarrow +\infty$

* Se $\alpha < 1$, allora $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{-\alpha+1} \left(1 - \frac{1}{\varepsilon^{\alpha-1}} \right) = \frac{1}{1-\alpha} > 0$

$\downarrow$ 0

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx = \begin{cases} \nearrow \text{converge se } \alpha < 1 \\ \searrow \text{diverge a } +\infty \text{ se } \alpha \geq 1 \end{cases}$$

Tabellina (sostanzialmente è il contrario del caso $a + \infty$)

Posso sostituire $x=1$ con ogni estremo $a > 0$

Oss. geometrica



Tra 0 e $\pm$ il discorso si capovolge: più l'esponente è piccolo, + la funzione è piccola, più è facile che l'integrale converga.

— 0 — 0 — 1

Da parte un calcolo la primitiva per parti

$$\int x e^{-x} dx = \underbrace{x}_{F} \underbrace{(-e^{-x})}_{G} - \int \underbrace{1}_{f} \cdot \underbrace{(-e^{-x})}_{G} dx = -x e^{-x} + \int e^{-x} dx$$

$$(\star) = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A x e^{-x} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} [-x e^{-x} - e^{-x}]_0^A$$

$$= \lim_{A \rightarrow \infty} \left[\underbrace{-A e^{-A}}_{\rightarrow 0} - \underbrace{e^{-A}}_{\rightarrow 0} + \underbrace{0 \cdot e^0}_{\rightarrow 0} + \underbrace{e^0}_{=1} \right] = 1.$$

$\frac{A}{e^x}$: esponenziale batte potenza

Esempio 5 $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^3} dx$ Metodo sbagliato $= \left[-\frac{1}{2} \frac{1}{x^2} \right]_{-1}^1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$

Si tratta di un integrale improprio con problemi in $x=0$ (la funzione integranda non è limitata).

Per prima cosa si spezza

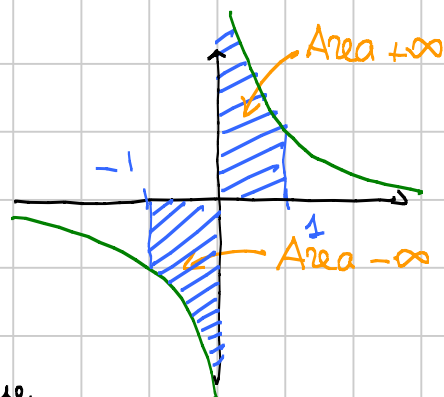
$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^3} dx = \int_{-1}^0 \frac{1}{x^3} dx + \underbrace{\int_0^1 \frac{1}{x^3} dx}_{+\infty}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{x^3} dx = +\infty \quad (\text{è in tabellina e } \alpha = 3 \text{ è un esponente che a } 0 \text{ dà divergenza})$$

$$\int_{-1}^0 \frac{1}{x^3} dx = -\infty \quad (\text{volendo per simmetria oppure usando la definizione})$$

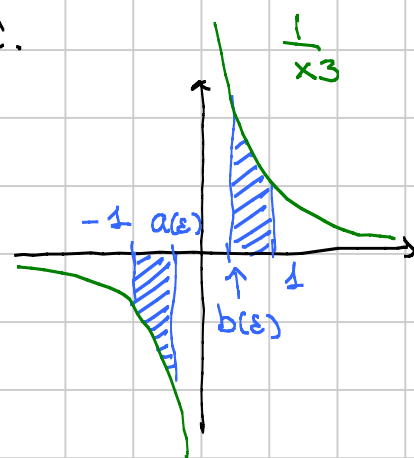
L'integrale globale, essendo somma di uno che fa $+\infty$ e uno che fa $-\infty$, per definizione è INDETERMINATO.

Brutalmente: la teoria vieta la compensazione tra $+\infty$ e $-\infty$, anche se geometricamente uguali.



Si potrebbe definire $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^3} dx$ prendendo

due funzioni $a(\varepsilon) \rightarrow 0^-$ e $b(\varepsilon) \rightarrow 0^+$ e calcolare



$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-1}^{a(\varepsilon)} \frac{1}{x^3} dx + \int_{b(\varepsilon)}^1 \frac{1}{x^3} dx \quad (\text{sto facendo un buco intorno a } 0)$$

1° modo: buco simmetrico $a(\varepsilon) = -\varepsilon$ $b(\varepsilon) = \varepsilon$.

Calcolo il limite e viene 0.

2° modo: buco "asimmetrico": $a(\varepsilon) = -\varepsilon$ $b(\varepsilon) = 2\varepsilon$

Calcolo il limite e viene $-\infty$

Per un integrale proprio, se uno fa un buco la cui ampiezza tende a 0, l'integrale converge a quello senza buco, e il tutto non dipende dalla simmetria o no del buco. Se voglio lo stesso per gli integrali impropri devo vietare la compensazione.

