

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 082

Titolo nota

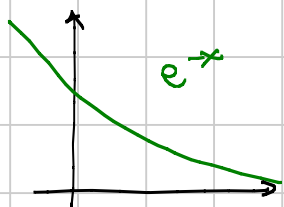
24/11/2011

Integrali impropri

Integrali propri : * zona di integrazione limitata (intervallo $[a, b]$)
* funzione integranda limitata

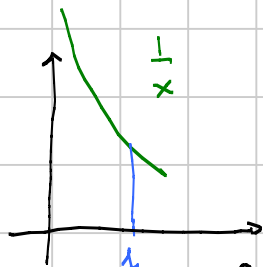
Un integrale si dice improprio se manca uno o tutti e 2 i requisiti

Esempi $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx$



Funzione limitata
Zona integr.: NO

$$\int_0^1 \frac{1}{x} dx$$



Zona integr. limitata
integranda: NO

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$$



Qui ci sono entrambi
i problemi

Integrali impropri MONOPROBLEMA, cioè con un problema solo

Due tipologie

① Zona di integrazione = semiretta $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ oppure $\int_{-\infty}^a f(x) dx$
integranda $f(x)$ limitata

② Zona di integrazione = intervallo $[a, b]$ (quindi limitata)
Integranda $f(x)$ non limitata nell'intorno di $x=a$ oppure $x=b$
(e solo in uno dei 2 estremi)

Se un integrale improprio ha più di un problema, come prima cosa occorre spezzarlo in somme di integrali monoprobema.

Esempi (di spezzamento) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = \underbrace{\int_0^5 \frac{1}{x^2} dx}_{\text{solo problema in } 0} + \underbrace{\int_5^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx}_{\text{solo problema a } +\infty}$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^{-5} e^{-x^2} dx + \int_{-5}^5 e^{-x^2} dx + \int_5^{+\infty} e^{-x^2} dx$$

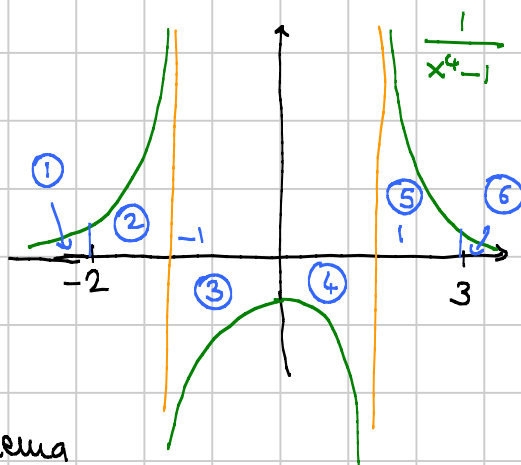


$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^{20}} dx = \int_{-1}^0 \frac{1}{x^{20}} dx + \int_0^1 \frac{1}{x^{20}} dx$$

(il problema deve essere in un estremo dell'intervallo)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^4-1} dx$$

$$= \int_{-\infty}^{-2} + \int_{-2}^{-1} + \int_{-1}^0 + \int_0^1 + \int_1^3 + \int_3^{+\infty}$$



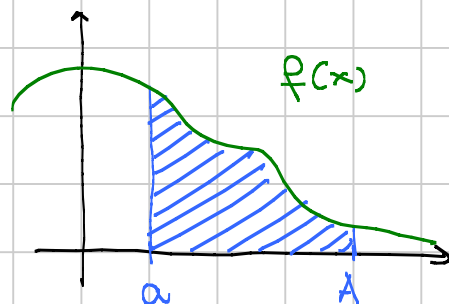
Il primo e l'ultimo hanno come unico problema la zona di integrazione, i restanti da non limitatezza dell'integranda in un estremo.

Definizioni nei casi MONOPROBLEMA

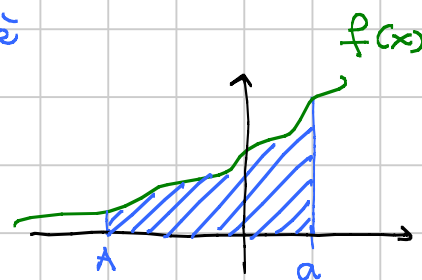
Caso ① Zona di integrazione = semiretta

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A f(x) dx$$

Fissato A, si tratta di un integrale PROPRIO, perché f(x) è limitata per ipotesi.



$$\int_{-\infty}^a f(x) dx = \lim_{A \rightarrow -\infty} \int_A^a f(x) dx$$



Esempio 1

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{-x} dx &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A e^{-x} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} [-e^{-x}]_0^A \\ &= \lim_{A \rightarrow +\infty} [-e^{-A} + 1] = 1 \end{aligned}$$

Si dice in questo caso che l'integrale improprio converge, e fa 1.

Oss. Un integrale improprio, essendo un limite, ha 4 possibili comportamenti ..

Esempio 2
$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_1^A \frac{1}{x} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} [\log x]_1^A$$

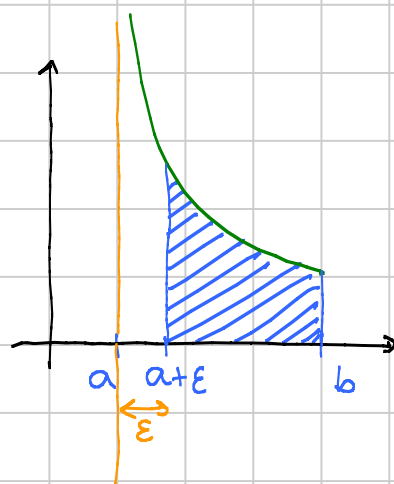
$$= \lim_{A \rightarrow +\infty} (\log A - \log 1) = +\infty$$

L' integrale improprio diverge a $+\infty$,

Caso ② Zona integrabile = intervallo $[a, b]$
 Integranda $f(x)$ non limitata in
 un intorno di a .

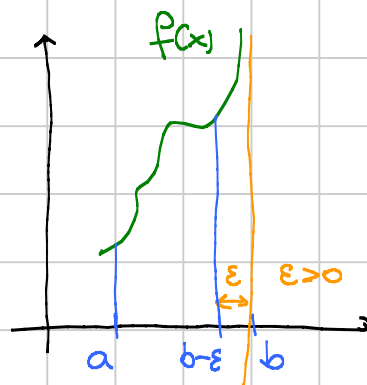
$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx$$

ad ε fissato questo integrale è
 proprio perché il unico problema è in a .



Se il problema di $f(x)$ è la non limitatezza
 intorno all' estremo b , allora

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx$$



Esempio 1
$$\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^2 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} [2\sqrt{x}]_{\varepsilon}^2$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (2\sqrt{2} - 2\sqrt{\varepsilon}) = 2\sqrt{2}$$

Esempio 2
$$\int_0^1 \log x dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^1 \log x dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} [x \log x - x]_{\varepsilon}^1$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (1 \log 1 - 1 - \varepsilon \log \varepsilon + \varepsilon) = -1$$

(notevole)

Le definizioni date coprono il caso unoproblema.

Se l'integrale ha più problemi

- * si spezza in integrali con un problema solo
- * si studiano separatamente i vari pezzi
- * si deduce il comportamento globale sulla base dei singoli pezzi (con le regole di somma e differenza in $\bar{\mathbb{R}}$), con l'accordo che se almeno un pezzo diverge a $+\infty$ e almeno un pezzo diverge a $-\infty$, allora quello complessivo si dichiara indeterminato.

Esempio 3

$$\int_{\pi}^{+\infty} \cos x \, dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{\pi}^A \cos x \, dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} [\sin x]_{\pi}^A$$
$$= \lim_{A \rightarrow +\infty} [\sin A - \sin \pi] = \text{N.E.}$$

"0"

L'integrale è indeterminato.

Esempio 4

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} \, dx = \int_{-\infty}^0 + \int_0^{+\infty}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} \, dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A \frac{1}{1+x^2} \, dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} [\arctan x]_0^A$$
$$= \lim_{A \rightarrow +\infty} (\arctan A - \arctan 0) = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2} \, dx = \frac{\pi}{2} \quad (\text{o si usa la definizione, o il fatto che l'integrandola è pari})$$

Quindi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} \, dx = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$