

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 081

Titolo nota

23/11/2011

Sostituzione razionalizzante per integrali con $\sin x$ e $\cos x$

ULTIMA SPIAGGIA: usare formule parametriche.

Ponendo $y = \tan \frac{x}{2}$ si ha che $\sin x = \frac{2y}{y^2+1}$ $\cos x = \frac{1-y^2}{y^2+1}$

In questo modo $\sin x$ e $\cos x$ vengono rimpiazzati da funzioni razionali di y . Cosa succede a dx ?

Ricavo x : $\frac{x}{2} = \arctan y$, quindi $x = 2 \arctan y$, quindi $dx = \frac{2}{1+y^2} dy$, che è razionale.

Esempio 1 $\int \frac{1}{\sin x} dx$ Pongo $y = \tan \frac{x}{2}$, da cui $dx = \frac{2}{1+y^2} dy$

$$\sin x = \frac{2y}{y^2+1}$$

$$= \int \underbrace{\frac{y^2+1}{2y}}_{\frac{1}{\sin x}} \underbrace{\frac{2}{1+y^2} dy}_{dx} = \int \frac{1}{y} dy = \log |y| = \log \left| \tan \frac{x}{2} \right|$$

Altro modo di fare lo stesso:

$$\int \frac{1}{\sin x} dx = \int \frac{\sin x}{\sin^2 x} dx = \int \frac{\sin x}{1 - \cos^2 x} dx$$

Pongo $y = \cos x$, da cui $dy = -\sin x dx$ e ottengo

$$= \int \frac{-\sin x}{\cos^2 x - 1} dx = \int \frac{dy}{y^2 - 1} = -\frac{1}{2} \log |y+1| + \frac{1}{2} \log |y-1| = \dots \text{ si ferma in } x$$

$$\frac{1}{y^2-1} = \frac{A}{y+1} + \frac{B}{y-1} = \frac{Ay - A + By + B}{(y+1)(y-1)} \quad \begin{cases} A+B=0 & A=-\frac{1}{2} \\ -A+B=1 & B=\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\frac{1}{y^2-1} = -\frac{1}{2} \frac{1}{y+1} + \frac{1}{2} \frac{1}{y-1}$$

Esempio 2 $\int \arcsin x \, dx$

$$= \int \underbrace{1}_g \cdot \underbrace{\arcsin x}_F \, dx = \underbrace{x}_G \cdot \underbrace{\arcsin x}_F - \int \underbrace{x}_G \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}_f \, dx$$

$$= x \cdot \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$$

Per calcolare $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$ si possono usare le sostituzioni già usate per la primitiva di $\sqrt{1-x^2}$.

Tuttavia in questo è più comodo

porre $y = 1-x^2$, da cui $dy = -2x \, dx$, da cui

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = -\frac{1}{2} \int \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}_{\frac{1}{\sqrt{y}}} \underbrace{(-2x \, dx)}_{dy} = -\frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{y}} \, dy = -\frac{\sqrt{y}}{\frac{1}{2}} \, dy = -\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{1-x^2}}$$

In conclusione:

$$\int \arcsin x \, dx = x \cdot \arcsin x + \sqrt{1-x^2} \quad (\text{verifica!})$$

In maniera analoga si calcola $\int \arccos x \, dx$.

Esempio 3 $\int \frac{1}{\sin^3 x \cos^3 x} \, dx$

1° modo Formule parametriche: anguri!

$$\text{2° modo} \quad \text{Pecorso} = 8 \int \frac{1}{8 \sin^3 x \cos^3 x} \, dx = 8 \int \frac{1}{\sin^3(2x)} \, dx$$

$$= 8 \int \frac{\sin(2x)}{\sin^4(2x)} \, dx = 8 \int \frac{\sin(2x)}{(1-\cos^2(2x))^2} \, dx$$

Pongo $y = \cos(2x)$, da cui $dy = -2 \sin(2x)$ e viene $-4 \int \frac{dy}{(1-y^2)^2}$
e questo si fa.

$$\frac{1}{(1-y^2)^2} = \frac{1}{(y^2-1)^2} = \frac{1}{(y+1)^2(y-1)^2} = \frac{A}{y+1} + \frac{B}{y-1} + \frac{C}{y^2-1}$$

e da qui si conclude.

3° modo Moltiplico sopra e sotto per $\cos x$

$$= \int \frac{\cos x}{\sin^3 x \cos^4 x} dx = \int \frac{\cos x}{\sin^3 x (1-\sin^2 x)^2} dx \stackrel{y=\sin x}{=} \int \frac{dy}{y^3(1-y^2)^2}$$

che è razionale, ma un po' peggio di prima.

4° modo $\int \frac{1}{\sin^3 x \cos^3 x} dx = \int \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\sin^3 x \cos^3 x} dx$

$$= \int \frac{1}{\sin^3 x \cos x} dx + \int \frac{1}{\sin x \cos^3 x} dx$$

e questi si fanno con gli stessi metodi

4° modo bis $\int \frac{1}{\sin^3 x \cos^3 x} dx = \int \frac{(\cos^2 x + \sin^2 x)^2}{\sin^3 x \cos^3 x} dx$

$$= \int \frac{\cos^4 x + 2\cos^2 x \sin^2 x + \sin^4 x}{\sin^3 x \cos^3 x} dx =$$

$$\int \frac{\cos x}{\sin^3 x} dx + 2 \int \frac{1}{\sin x \cos x} dx + \int \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx$$

$$- \frac{1}{2} \frac{1}{\sin^2 x}$$

↑
se proprio avendo
posto $y = \sin x$

$$+ \frac{1}{2} \frac{1}{\cos^2 x}$$

se proprio avendo
posto $y = \cos x$

Resta da fare $\int \frac{1}{\sin x \cos x} dx \rightarrow$ Moltiplico sopra e sotto per $\sin x$ o $\cos x$
 $\rightarrow 1 = \sin^2 x + \cos^2 x$

$$\int \frac{1}{\sin x \cdot \cos x} dx = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cdot \cos x} dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx + \int \frac{\cos x}{\sin x} dx$$

$$= -\log |\cos x| + \log |\sin x|$$

Esempio 4 $\int_0^{\pi} \left| \frac{1}{2} - \cos^2 x \right| dx$

Bisogna capire dove l'integranda è ≥ 0 e dove è ≤ 0 .

$$\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1 \Rightarrow \cos^2 x = \frac{1 + \cos(2x)}{2}, \text{ quindi}$$

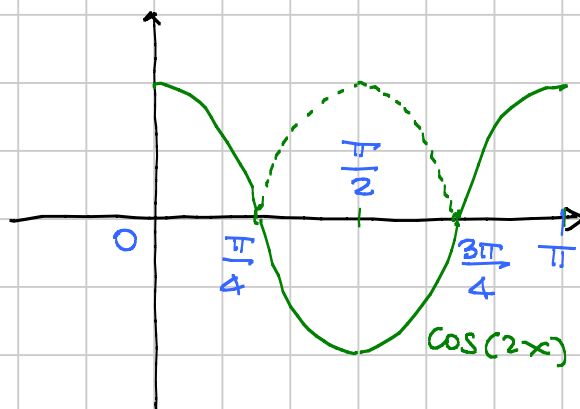
$$\text{integrale iniziale} = \int_0^{\pi} \left| \cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \cos(2x) \right| dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} |\cos(2x)| dx$$

Si tratta di capire il segno di $\cos(2x)$ per $x \in [0, \pi]$

$\cos(2x)$ è come $\cos x$, solo con il periodo dimezzato

[Anche se precorsistica: risolvere

$$\cos(2x) = \frac{1}{2}$$



$$2x = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ cioè } x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi$$

quindi in particolare ho 4 soluzioni in $[0, 2\pi]$]

Tornando all'integrale

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} |\cos(2x)| dx &= \int_0^{\pi/4} |\cos(2x)| dx + \int_{\pi/4}^{3\pi/4} |\cos(2x)| dx + \int_{3\pi/4}^{\pi} |\cos(2x)| dx \\ &= \int_0^{\pi/4} \cos(2x) dx - \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \cos(2x) dx + \int_{3\pi/4}^{\pi} \cos(2x) dx \end{aligned}$$

levato $\frac{1}{2}$
dopo video

cambio di segno perché

$|\cos(2x)| = -\cos(2x)$ nella zona