

Integrali di funzioni del tipo $\sqrt{\text{polinomio di 2° grado}}$

Esempio 1 $\int \sqrt{x^2+1} dx$

Sostituzione: $\sqrt{x^2+1} = x+y$ (che è come dire $y = \sqrt{x^2+1} - x$)

Devo ricavare x in funzione di y . Faccio il quadrato

$$\cancel{x^2}+1 = \cancel{x^2}+2xy+y^2 \quad \text{Così diventa di 1° grado in } x$$

$$2xy = 1-y^2 \quad x = \frac{1-y^2}{2y} \quad dx = \left(\frac{1-y^2}{2y}\right)' dy$$

Otengo così che

$$\underbrace{\int \sqrt{x^2+1} dx}_{x+y} = \int \underbrace{\left(\frac{1-y^2}{2y} + y\right)}_{x+y} \underbrace{\left(\frac{1-y^2}{2y}\right)' dy}_{dx} \quad \text{da qui in poi è razionale}$$

$$= \int \frac{1-y^2+2y^2}{2y} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{1}{y} - y\right)' dy = \frac{1}{4} \int \frac{1+y^2}{y} \left(-\frac{1}{y^2} - 1\right) dy =$$

$$= -\frac{1}{4} \int \frac{(y^2+1)^2}{y^3} dy = -\frac{1}{4} \int \frac{y^4+2y^2+1}{y^3} dy = -\frac{1}{4} \int \left(y + \frac{2}{y} + \frac{1}{y^3}\right) dy$$

$$= -\frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} y^2 + 2 \log |y| - \frac{1}{2} \frac{1}{y^2}\right)$$

Ora dovrei tornare in x ponendo $y = \sqrt{x^2+1} - x$, il che è un conto.

Oss.1 Ciò che ha fatto funzionare la sostituzione è che dopo aver fatto il quadrato abbiamo ottenuto un'eq. di 1° grado di x

Oss.2 Se dovessi fare un integrale con estremi, non servirebbe ritornare in x .

$$\int_0^1 \sqrt{1+x^2} dx$$

Quando pongo $y = \sqrt{1+x^2} - x$ cambio gli estremi:

* quando $x=0$ ho che $y=1$

* quando $x=1$ ho che $y=\sqrt{2}-1$

$$= \int_1^{\sqrt{2}-1} \dots dy = \left[-\frac{1}{8} y^2 - \frac{1}{2} |\log y| + \frac{1}{8} \frac{1}{y^2} \right]_1^{\sqrt{2}-1} = \text{basta sostituire.}$$

Esempio 2 $\int \sqrt{3x^2 - 5x + 7} dx$

Pongo $\sqrt{3x^2 - 5x + 7} = \sqrt{3}x + y$. Infatti se faccio il quadrato:

$$\cancel{3x^2} - 5x + 7 = \cancel{3x^2} + 2\sqrt{3}xy + y^2 \quad \text{È diventato di 1° grado in } x$$

$$x(2\sqrt{3}y + 5) = 7 - y^2 \quad \text{da cui} \quad x = \frac{7-y^2}{2\sqrt{3}y+5} \quad dx = \left(\frac{7-y^2}{2\sqrt{3}y+5} \right)' dy$$

Quindi:

$$\text{integrale dato} = \int \underbrace{\left\{ \sqrt{3} \frac{7-y^2}{2\sqrt{3}y+5} + y \right\}}_{\sqrt{3}x+y} \underbrace{\left(\frac{7-y^2}{2\sqrt{3}y+5} \right)'}_{dx} dy$$

Funzione razionale della variabile y ...

Fatto generale: se ho $\int \sqrt{ax^2 + bx + c} dx$ posso pome

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a}x + y \quad \text{e questa funziona se } a > 0.$$

Esempio 3 $\int \sqrt{1-x^2} dx$

Si faceva con $x = \sin y$, da cui
 $dx = \cos y dy$

$$\begin{aligned} &= \int \underbrace{\sqrt{1-\sin^2 y}}_{\sqrt{1-x^2}} \cdot \underbrace{\cos y dy}_{dx} = \int \cos^2 y dy = \frac{1}{2} y + \frac{1}{2} \cos y \sin y \quad \text{e} \\ &= \frac{1}{2} y + \frac{1}{2} \sqrt{1-\sin^2 y} \cdot \sin y \\ &\text{da qui si conclude tornando in } x \\ &= \frac{1}{2} \arcsin x + \frac{1}{2} \sqrt{1-x^2} \cdot x \end{aligned}$$

Idea: $\int \sqrt{1+x^2} dx$

Ricordiamo che $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

Pongo quindi $x = \sinh y$, da cui $dx = \cosh y \cdot dy$

$$= \int \sqrt{1 + \sinh^2 y} \cdot \cosh y dy = \int \cosh^2 y dy$$

Ci sono 3 modi per calcolare questa primitiva:

- * usare la formula per $\cosh y$ in funzione degli esponenziali
- * usare la formula di duplicazione $\cosh(2y) = \dots$
- * parti + grande ritorno:

$$\int \cosh^2 y dy = \int \underset{F}{\cosh y} \cdot \underset{g}{\cosh y} dy = \underset{F}{\cosh y} \cdot \underset{G}{\sinh y} - \int \underset{f}{\sinh^2 y} \underset{G}{dy}$$

$$= \cosh y \cdot \sinh y + \int (1 - \cosh^2 y) dy$$

$$= \cosh y \cdot \sinh y + y - \underbrace{\int \cosh^2 y dy}_{\text{grande ritorno}}$$

Portando a sx e ricavando otteniamo che

$$\begin{aligned} \int \cosh^2 y dy &= \frac{1}{2} y + \frac{1}{2} \cosh y \cdot \sinh y = \frac{1}{2} y + \frac{1}{2} \sqrt{1 + \sinh^2 y} \cdot \sinh y \\ &= \frac{1}{2} \text{Sett} \sinh x + \frac{1}{2} \sqrt{1 + x^2} \cdot x \end{aligned}$$

Esercizio: controllare che la primitiva ottenuta in questo modo coincida con quella ottenuta con l'altra sostituzione.

Altro modo per fare $\int \sqrt{1-x^2} dx$. Scomponiamo il polinomio sotto radice, e poniamo

$$\sqrt{1-x^2} = \sqrt{(1+x)(1-x)} = y(1+x) \quad [y: \text{uno dei 2 fattori}]$$

Faccio i quadrati:

$$(\cancel{1+x})(1-x) = y^2(1+x)^2$$

Come prima diventa di 1° grado in x : $1-x = y^2 + y^2 x$

$$x(y^2+1) = 1-y^2, \quad x = \frac{1-y^2}{y^2+1}, \quad \text{da cui } dx = \left(\frac{1-y^2}{y^2+1}\right)' dy$$

$$\int \sqrt{1-x^2} dx = \int \underbrace{y \left(1 + \frac{1-y^2}{y^2+1}\right)}_{y(1+x)} \left(\frac{1-y^2}{y^2+1}\right)' dy = \int y \cdot \frac{2}{y^2+1} \left(\frac{1-y^2}{y^2+1}\right)' dy$$

Con qualche calcolo si fa

Esempio 4 $\int \sqrt{4-3x-x^2} dx$ Scompongo il polinomio di 2° grado
 $x^2 + 3x - 4 = (x+4)(x-1)$, quindi pongo

$$\sqrt{(x+4)(1-x)} dx = y(x+4) \quad \text{oppure} \quad \sqrt{(x+4)(1-x)} = y(1-x)$$

Fatto generale Se il polinomio di 2° grado ha 2 radici reali λ, μ , allora posso porre

$$\sqrt{\text{polinomio}} = y(x-\lambda) \quad \text{oppure} \quad \sqrt{\text{polinomio}} = y(x-\mu).$$

Riassumendo: per $\sqrt{\text{polinomio di 2° grado}} = \sqrt{ax^2+bx+c}$ abbiamo questa situazione

	$a > 0$	$a < 0$
$\Delta > 0$	$\sqrt{\dots} = \sqrt{a}x+y$ Fattorizz.	Fattorizz.
$\Delta < 0$	$\sqrt{\dots} = \sqrt{a}x+y$	?

Il quarto caso non si pone in quanto se $a < 0$ e $\Delta < 0$, allora il polinomio è sempre < 0 , quindi la funzione non è definita per nessun valore di x .