

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 079

Titolo nota

19/11/2011

Esempio 1 $\int \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx$ Pongo $y = e^x$, da cui $\frac{dy}{dx} = e^x$, $dy = e^x dx$

$$= \int \frac{1}{1+e^{2x}} \cdot e^x dx = \int \frac{1}{1+y^2} dy = \arctan y = \arctan(e^x)$$

Esempio 2 $\int \frac{1}{1+e^{2x}} dx$

1° metodo: come prima Pongo $y = e^x$, da cui $dy = e^x dx$

$$= \int \frac{1}{e^x} \cdot \frac{1}{1+e^{2x}} \cdot \underbrace{e^x dx}_{dy} = \int \frac{1}{y(1+y^2)} dy \quad \text{Funzione razionale}$$

$$\frac{1}{y(1+y^2)} = \frac{A}{y} + \frac{By+C}{1+y^2} = \frac{A + Ay^2 + By^2 + Cy}{y(1+y^2)}$$

$$\begin{cases} A+B=0 & (\text{coeff. } x^2) \\ C=0 & (\text{coeff. } x) \\ A=1 & (\text{termine noto}) \end{cases} \quad \begin{cases} B=-1 \\ C=0 \\ A=1 \end{cases}$$

Quindi

$$\frac{1}{y(1+y^2)} = \frac{1}{y} - \frac{y}{1+y^2} \Rightarrow \int \frac{dy}{y(1+y^2)} = \int \frac{1}{y} dy - \int \frac{y}{1+y^2} dy$$

$$= \log|y| - \frac{1}{2} \log(1+y^2)$$

Tornando in x :

$$\int \frac{1}{1+e^{2x}} dx = \log|e^x| - \frac{1}{2} \log(1+e^{2x}) = x - \frac{1}{2} \log(1+e^{2x})$$

2° metodo: Pongo $y = 1+e^{2x}$, da cui $\frac{dy}{dx} = 2e^{2x}$, quindi $dy = 2e^{2x} dx$

$$\int \frac{1}{1+e^{2x}} dx = \frac{1}{2} \int \underbrace{\frac{1}{e^{2x}}}_{\frac{1}{y-1}} \underbrace{\frac{1}{1+e^{2x}}}_{\frac{1}{y}} \underbrace{2e^{2x} dx}_{dy} = \frac{1}{2} \int \frac{dy}{(y-1)y}$$

$$\frac{1}{(y-1)y} = \frac{A}{y-1} + \frac{B}{y} = \frac{Ay + By - B}{(y-1)y} \quad \begin{cases} A+B=0 \\ -B=1 \end{cases} \quad \begin{cases} A=1 \\ B=-1 \end{cases}$$

Quindi $\int \frac{1}{(y-1)y} dy = \int \frac{1}{y-1} dy - \int \frac{1}{y} dy = \log|y-1| - \log|y|$

Tornando in x

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{1+e^{2x}} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{(y-1)y} dy = \frac{1}{2} \log|y-1| - \frac{1}{2} \log|y| \\ &= \frac{1}{2} \log|e^{2x}| - \frac{1}{2} \log|1+e^{2x}| \\ &= x - \frac{1}{2} \log(1+e^{2x}) \end{aligned}$$

Fatto generale: se l'integranda è una funzione razionale di e^x , la sostituzione $y = e^x$ lo trasforma in una funzione razionale (ma anche altre sostituzioni possono andare bene o meglio)

Esempio 3 $\int \frac{1}{\cos x} dx = \int \frac{\cos x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{\cos x}{1 - \sin^2 x} dx$

Pongo $y = \sin x$, da cui $dy = \cos x \cdot dx$, quindi

$$\int \frac{1}{1 - \sin^2 x} \cdot \cos x dx = \int \frac{1}{1 - y^2} dy = - \int \frac{1}{y^2 - 1} dy \quad \text{Funzione razionale}$$

$$\frac{1}{y^2 - 1} = \frac{1}{(y+1)(y-1)} = \frac{A}{y+1} + \frac{B}{y-1} \quad \text{Poi si fa il sistema lineare}$$

Moltiplico per $(y+1)$: $\frac{1}{y-1} = A + B \frac{y+1}{y-1}$. Metto $y = -1$ e ho $A = -\frac{1}{2}$

Moltiplico per $(y-1)$: $\frac{1}{y+1} = A \frac{y-1}{y+1} + B$. Metto $y = 1$ e ho $B = \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} \text{Quindi } \int \frac{1}{y^2 - 1} dy &= -\frac{1}{2} \int \frac{1}{y+1} dy + \frac{1}{2} \int \frac{1}{y-1} dy \\ &= -\frac{1}{2} \log|y+1| + \frac{1}{2} \log|y-1| \end{aligned}$$

Torno in x :

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\cos x} dx &= - \int \frac{1}{y^2 - 1} dy = \frac{1}{2} \log|y+1| - \frac{1}{2} \log|y-1| \\ &= \frac{1}{2} \log|\sin x + 1| - \frac{1}{2} \log|\sin x - 1| \end{aligned}$$

La risposta si può scrivere in tanti modi:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \log(\sin x + 1) - \frac{1}{2} \log(1 - \sin x) &= \frac{1}{2} \log \frac{\sin x + 1}{1 - \sin x} \\ &= \frac{1}{2} \log \frac{\sin x + 1}{1 - \sin x} \cdot \frac{1 + \sin x}{1 + \sin x} = \frac{1}{2} \log \frac{(1 + \sin x)^2}{\cos^2 x} = \log \left(\frac{1 + \sin x}{|\cos x|} \right) \end{aligned}$$

Esempio 4 $\int \frac{1}{\sin^3 x} dx = \int \frac{\sin x}{\sin^4 x} dx = \int \frac{\sin x}{(1 - \cos^2 x)^2} dx$

Pongo $y = \cos x$, da cui $dy = -\sin x dx$

$$= - \int \frac{1}{(1 - \cos^2 x)^2} \underbrace{(-\sin x) dx}_{dy} = - \int \frac{1}{(1 - y^2)^2} dy \quad \text{Funzione razionale.}$$

Fatto generale: lo stesso metodo permette di trattare potenze negative dispari di $\sin x$ e $\cos x$.

Esempio 5 $\int \frac{x+5}{\sqrt{x+3}} dx$

Pongo $y = \sqrt{x}$ $\rightarrow$ quindi $dy = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$
 corretto, ma scomodo
 $\rightarrow$ quindi $x = y^2$, da cui $\frac{dx}{dy} = 2y$, quindi $dx = 2y dy$

$$= \int \frac{y^2 + 5}{y + 3} \underbrace{2y dy}_{dx}$$

$$= 2 \int \frac{y^3 + 5y}{y + 3} dy \quad \text{Funzione razionale}$$

$$\begin{array}{r} y^3 + 5y \quad | y+3 \\ -y^3 - 3y^2 \\ \hline -3y^2 + 5y \\ +3y^2 + 9y \\ \hline 14y \\ -14y - 42 \\ \hline -42 \end{array}$$

Dalla divisione abbiamo che
 $y^3 + 5y = (y+3)(y^2 - 3y + 14) - 42$
 da cui

$$\frac{y^3 + 5y}{y + 3} = y^2 - 3y + 14 - \frac{42}{y + 3}$$

quindi

$$\int \frac{y^3 + 5y}{y + 3} dy = \int \left(y^2 - 3y + 14 - \frac{42}{y + 3} \right) dy = \frac{1}{3} y^3 - \frac{3}{2} y^2 + 14y - 42 \log |y + 3|$$

e infine

$$\int \frac{x+5}{\sqrt{x+3}} dx = 2 \int \frac{y^3 + 5y}{y + 3} dy = \frac{2}{3} x \sqrt{x} - 3x + 28 \sqrt{x} - 84 \log(\sqrt{x} + 3)$$

Esempio 6 $\int \frac{x+5}{\sqrt[3]{x+7}} dx$

Pongo $y = \sqrt[3]{x}$, da cui $x = y^3$, quindi
 $dx = 3y^2 dy$

$$= \int \frac{y^3+5}{y+7} \underbrace{3y^2 dy}_{dx} = 3 \int \frac{y^3+5y^2}{y+7} dy \quad \text{Funzione razionale}$$

Esempio 7 $\int \frac{\sqrt{x}+5}{\sqrt[3]{x+7}} dx$

Pongo $y = \sqrt[6]{x}$, da cui $x = y^6$, quindi
 $dx = 6y^5 dy$

$$= \int \frac{\sqrt{y^6}+5}{\sqrt[3]{y^6+7}} \cdot 6y^5 dy = 6 \int \frac{y^3+5}{y^2+7} y^5 dy \quad \text{Funzione razionale}$$

Oss. La stessa cosa funzionava se invece di $\sqrt{x}$ e $\sqrt[3]{x}$ c'erano $\sqrt{ax+b}$ e $\sqrt[3]{ax+b}$.

La cosa importante è che la cosa sotto radice sia sempre la stessa.
 L'indice della radice usata nella sostituzione è il minimo comune multiplo.

Esempio 8 $\int \sqrt{\frac{2x+3}{3x-1}} dx$

Pongo $y = \sqrt{\frac{2x+3}{3x-1}}$, da cui

$$y^2 = \frac{2x+3}{3x-1}, \quad 3y^2x - y^2 = 2x+3$$

$$x(3y^2-2) = y^2+3, \quad x = \frac{y^2+3}{3y^2-2}, \quad \text{da cui}$$

$$dx = \left(\frac{y^2+3}{3y^2-2} \right)' dy$$

$$= \int y \underbrace{\left(\frac{y^2+3}{3y^2-2} \right)'}_{dx} dy$$

Funzione razionale

$F = \underbrace{\quad}_g$

e via per parti...