

Esempio 1 (virtuale)

$$\frac{x^3 + 5}{(2x+1)(x-3)(x-8)(x^2+1)(x^2+x+1)} = \frac{A}{2x+1} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{x-8} + \frac{Dx+E}{x^2+1} + \frac{Fx+G}{x^2+x+1}$$

Costanti sopra i fattori di grado 1

Fattori di grado 1 sopra quelli di grado 2.

Quante sono le incognite? Sono tante quante grado (denominatore), poiché ogni fattore di grado 1 ha prodotto 1 incognita e ogni fattore di grado 2 ha prodotto 2 incognite.

Quante sono le equazioni? Tante quante i coeff. di $P(x)$, che ha grado $<$ grado del denominatore. Esempio: denominatore ha grado 7, quindi numeratore ha grado ≤ 6 , quindi devo sistemare 7 coeff.

In altre parole: numero incognite = numero equazioni = grado ($Q(x)$).

Fatto generale: il sistema lineare risultante ha sempre soluzione unica, quindi si trovano in maniera univoca i coefficienti.

Esempio 2
$$\frac{x+5}{x^2+5x+6} = \frac{x+5}{(x+2)(x+3)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+3}$$

1° metodo: fare il sistema lineare ...

2° metodo: moltiplico tutto per $(x+2)$:

$$\frac{x+5}{x+3} = A + B \frac{x+2}{x+3}$$

Oss. funziona con i fattori di 1° grado

Metto $x = -2$ e ottengo $\frac{-2+5}{-2+3} = A + B \cdot 0, A = 3$

Analogamente moltiplico per $x+3$, $\frac{x+5}{x+2} = A \frac{x+3}{x+2} + B$

e metto $x = -3$ per trovare $B = \frac{-3+5}{-3+2} = \frac{2}{-1} = -2.$

Caso generale: alcuni fattori hanno molteplicità

Esempio (virtuale)

come prima facendo finta che non ci siano molteplicità

$$\frac{P(x)}{(x+1)^4 (x+5)^2 (x+7) (x^2+1)^3} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+5} + \frac{C}{x+7} + \frac{Dx+E}{x^2+1} + \frac{d}{dx} \frac{Fx^7+Gx^6+Hx^5+Ix^4+Jx^3+Kx^2+Lx+M}{(x+1)^3 (x+5) (x^2+1)^2}$$

numeratore a coeff. incogniti di grado inferiore di 1 rispetto al denominatore,

Parte non utilizzata del denominatore

Oss. Ancora una volta il numero di incognite è uguale a quello delle equazioni.

Esempio 1

$$\begin{aligned} \frac{x+2}{x^4+x^3} &= \frac{x+2}{x^3(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{d}{dx} \frac{Cx+D}{x^2} \\ &= \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx^2-2x(Cx+D)}{x^4} \\ &= \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx-2Cx-2D}{x^3} \\ &= \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} - \frac{Cx+2D}{x^3} \\ &= \frac{Ax^2(x+1) + Bx^3 - (Cx+2D)(x+1)}{x^3(x+1)} \\ &= \frac{Ax^3 + Ax^2 + Bx^3 - Cx^2 - Cx - 2Dx - 2D}{x^3(x+1)} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} A+B=0 & (\text{coeff. } x^3) \\ A-C=0 & (\text{coeff. } x^2) \\ -C-2D=1 & (\text{coeff. } x) \\ -2D=2 & (\text{termine noto}) \end{cases} \quad \begin{aligned} B &= -A = -1 \\ A &= C = 1 \\ C &= -2D-1 = 1 \\ D &= -1 \end{aligned}$$

se i conti sono giusti:

$$\frac{x+2}{x^4+x^3} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + \frac{d}{dx} \frac{x-1}{x^2}$$

Consiglio: verificare che la somma torni!

A questo p:to

$$\int \frac{x+2}{x^4+x^3} dx = \int \frac{1}{x} dx - \int \frac{1}{x+1} dx + \int \frac{d}{dx} \frac{x-1}{x^2} dx$$
$$= \log|x| - \log|x+1| + \frac{x-1}{x^2}$$

(verificare la primitiva!)

Esempio 2 $\int \frac{x+3}{(x^2+1)^2} dx$

$$\frac{x+3}{(x^2+1)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{d}{dx} \frac{Cx+D}{x^2+1}$$

$$= \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C(x^2+1) - 2x(Cx+D)}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{(Ax+B)(x^2+1) + Cx^2 + C - 2Cx^2 - 2Dx}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{Ax^3 + Ax + Bx^2 + B - Cx^2 + C - 2Dx}{(x^2+1)^2}$$

$$\begin{cases} A=0 & (\text{coeff. } x^3) \\ B-C=0 & (\text{coeff. } x^2) \\ A-2D=1 & (\text{coeff. } x) \\ B+C=3 & (\text{termine noto}) \end{cases} \quad \begin{cases} A=0 \\ B=C=\frac{3}{2} \\ D=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

Quindi

$$\frac{x+3}{(x^2+1)^2} = \frac{\frac{3}{2}}{x^2+1} + \frac{d}{dx} \frac{\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}}{x^2+1} = \frac{3}{2} \frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \frac{3x-1}{x^2+1}$$

da cui integrando:

$$\int \frac{x+3}{x^2+1} dx = \frac{3}{2} \arctan x + \frac{1}{2} \frac{3x-1}{x^2+1} \quad (\text{verificare!})$$

④ Integrare Integrare gli addendi provenienti dalla fase 3.

* Quelli con il $\frac{d}{dx}$ si integrano banalmente (si toglie $\frac{d}{dx} \dots$)

* Quelli del tipo $\frac{A}{ax+b}$ si integrano facilmente

$$\int \frac{A}{ax+b} dx = \frac{A}{a} \int \frac{a}{ax+b} dx = \frac{A}{a} \log|ax+b|$$

* Restano gli addendi del tipo $\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$ con $\Delta = b^2-4ac < 0$

Volevo ci sarebbe una formula...

Questi si fanno con un po' di log ed un po' di arctan...

Esempio $\int \frac{x-4}{x^2+x+1} dx$

Oss. Il denominatore si può sempre scrivere come quadrato $+$ numero

sempre vero
quando
 $\Delta < 0$.

$$x^2+x+1 = x^2+x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+1 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}, \text{ quindi}$$

$$\frac{x-4}{x^2+x+1} = \frac{x-4}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}$$

Questo suggerisce il cambio $y = x + \frac{1}{2}$
da cui $dx = dy$

$$\int \frac{x-4}{x^2+x+1} dx = \int \frac{y-\frac{1}{2}-4}{y^2+\frac{3}{4}} dy = \int \frac{y}{y^2+\frac{3}{4}} dy - \frac{9}{2} \int \frac{1}{y^2+\frac{3}{4}} dy$$

$\text{logaritmo} \qquad \text{arctan}$

— 0 — 0 —