

INTEGRAZIONE FUNZIONI RAZIONALI

$$\text{Funktion rationale} = \frac{\text{Polynomio}}{\text{Polynomio}} = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

Algoritmo per fare la primitiva di una funz. razionale:

- 1 - Divisione
- 2 - Fattorizzazione
- 3 - Sistema lineare
- 4 - Integrazione

① **Divisione** Se $\text{grado}(P(x)) < \text{grado}(Q(x))$ si passa alla fase success.
Altrimenti si divide $P(x)$ per $Q(x)$ (divisione tra polinomi).
Si ottiene

$$P(x) = Q(x)A(x) + R(x)$$

resto con grado $(R(x)) < \text{grado}(Q(x))$

Allora

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{Q(x) A(x) + R(x)}{Q(x)} = \boxed{A(x)} + \boxed{\frac{R(x)}{Q(x)}} \rightarrow \text{Nuova funz. raz. con grado (num.)} < \text{grado (denom.)}$$

Conclusione: basta saper fare le primitive di funzioni razionali con grado (numeratore) $<$ grado (denominatore).

Esempio 1 $\int \frac{x}{x+7} dx = \int \frac{x+7-7}{x+7} dx = \int \left(1 - \frac{7}{x+7}\right) dx = x - 7 \log|x+7|$

Esempio 2 $\int \frac{x^5+3}{x^2+1} dx$ Faccio la divisione tra $\boxed{x^5+3}$ e $\boxed{x^2+1}$
 $\text{P(x)} \quad \text{Q(x)}$

Dalla divisione: $\frac{x^5+3}{x^2+1} = \boxed{x^3 - x} + \frac{\boxed{x+3}}{x^2+1}$

$A(x)$ $\frac{P(x)}{Q(x)}$

$$\begin{array}{r}
 x^5 \quad \quad \quad +3 \quad | \quad x^2+1 \\
 -x^5 - x^3 \\
 \hline
 \quad -x^3 \quad +3 \\
 \quad +x^3 + x \\
 \hline
 \quad \quad x+3
 \end{array}$$

$A(x)$

$R(x)$

Dalla divisione

$$\begin{aligned}
 \int \frac{x^5+3}{x^2+1} dx &= \int (x^3-x) dx + \int \frac{x+3}{x^2+1} dx \\
 &= \frac{1}{4} x^4 - \frac{1}{2} x^2 + \int \frac{x}{x^2+1} dx + 3 \int \frac{1}{x^2+1} dx \\
 &= \frac{1}{4} x^4 - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{2} \log(x^2+1) + 3 \arctan x
 \end{aligned}$$

② Fattorizzazione Scomporre il denominatore

Fatto generale: ogni polinomio $Q(x)$ a coeff. reali si può scrivere come prodotto di polinomi di 1° o 2° grado, con la convenzione che i fattori di 2° grado devono essere non ulteriormente scomponibili. In questa scomposizione alcuni fattori possono risultare ripetuti. Si dice multiplicità di un fattore l'esponente con cui il fattore stesso compare nella scomposizione.

Esempi

$$x^2-1 = (x+1)(x-1)$$

$$x^3-1 = (x-1)(x^2+x+1)$$

↓ fattore di 2° grado con $\Delta < 0$, quindi non si scompone ulteriormente

$$(x^2-1)^2 = (x+1)^2 (x-1)^2 \rightarrow \text{multiplicità dei fattori}$$

$$x^4-1 = (x^2+1)(x^2-1) = (x^2+1)(x+1)(x-1)$$

↓ non scomponibile ulteriormente

$$x^6-1 = (x^3+1)(x^3-1) = (x+1) \underbrace{(x^2-x+1)}_{\Delta < 0} (x-1) \underbrace{(x^2+x+1)}_{\Delta < 0}$$

x^4+1 non può avere fattori di 1° grado perché non ha radici reali, ma si deve per forza scrivere come prodotto di 2 polinomi di 2° grado

$$x^4+1 = x^4+1+2x^2-2x^2 = (x^2+1)^2 - (\sqrt{2}x)^2$$

$$A^2 - B^2 = (A+B)(A-B)$$

$$= (x^2+1+\sqrt{2}x)(x^2+1-\sqrt{2}x)$$

Al termine della fase 2 il denominatore risulta il prodotto di fattori del tipo $(ax+b)^m$ e fattori del tipo $(x^2+bx+c)^m$ con $\Delta < 0$,

③ Sistema lineare Caso semplice: tutte le molteplicità sono uguali ad 1 ("non ci sono esponenti")

Obiettivo: scrivere la funzione razionale da integrare come somma di funzioni razionali che hanno come denominatore i singoli fattori (e numeratore di grado inferiore).

Esempio 1 $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x}{x^2-1} \leftarrow \text{termine fase 1}$

$$\frac{x}{x^2-1} = \frac{x}{(x+1)(x-1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1}$$

Fase 2

$$= \frac{Ax - A + Bx + B}{(x+1)(x-1)}$$

Cerco A e B in modo da avere uguaglianza

$$\begin{cases} A+B = 1 & (\text{coeff. di } x) \\ -A+B = 0 & (\text{termine noto}) \end{cases} \quad \begin{cases} 2A = 1 \\ A = B \end{cases} \quad A = B = \frac{1}{2}$$

Quindi al termine della fase 3 avrò

$$\frac{x}{x^2-1} = \frac{1}{2} \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2} \frac{1}{x-1} \quad \text{da cui}$$

$$\int \frac{x}{x^2-1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{x+1} dx + \frac{1}{2} \int \frac{1}{x-1} dx$$
$$= \frac{1}{2} \log|x+1| + \frac{1}{2} \log|x-1| = \log \sqrt{|x^2-1|}$$

Esempio 2 $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{2x^2+3}{x^3-1} = \frac{2x^2+3}{(x-1)(x^2+x+1)} =$

grado 0 perché
denom. ha grado 1

grado 1 perché
denom. ha grado 2

$$= \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1} = \frac{Ax^2+Ax+A+Bx^2+Cx-Bx-C}{(x-1)(x^2+x+1)}$$

Devo quindi supporre

$$\begin{cases} A+B=2 & (\text{coeff. } x^2) \\ A-B+C=0 & (\text{coeff. } x) \\ A-C=3 & (\text{termine noto}) \end{cases} \quad \begin{cases} B=2-A \\ A-2+A+A-3=0 \\ C=A-3 \end{cases} \quad \begin{cases} B=2-A=\frac{1}{3} \\ 3A=5 \quad A=\frac{5}{3} \\ C=A-3=-\frac{4}{3} \end{cases}$$

Quindi: $\frac{2x^2+3}{x^3-1} = \frac{5}{3} \frac{1}{x-1} + \frac{\frac{1}{3}x - \frac{4}{3}}{x^2+x+1} = \frac{5}{3} \frac{1}{x-1} + \frac{1}{3} \frac{x-4}{x^2+x+1}$

Sostanzialmente nella somma

* sopra i fattori di grado 1 metto fattori di grado 0, cioè costanti
 * " " " " " 2 metto " " " 1, cioè polinomi di grado 1 con i 2 coefficienti incogniti.

Determinare i coeff. incogniti si riduce ad un sistema lineare,
 — 0 — 0 —