

ANALISI MATEMATICA I — LEZIONE 076

Titolo nota

18/11/2011

Esempio 1 $\int x^3 e^{x^2} dx$ Pongo $y = x^2$, da cui $dy = 2x dx$

$$= \frac{1}{2} \int \underbrace{x^2 e^{x^2}}_{y e^y} \cdot \underbrace{2x dx}_{dy} = \frac{1}{2} \int \underbrace{y e^y}_{F g} dy = \frac{1}{2} \left\{ \underbrace{y e^y}_{F G} - \int \underbrace{1 \cdot e^y}_{f G} dy \right\}$$

$$= \frac{1}{2} y e^y - \frac{1}{2} e^y = \frac{1}{2} x^2 e^{x^2} - \frac{1}{2} e^{x^2}$$

In alternativa si poteva fare per parti scrivendo

$$\int x^3 e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int \underbrace{x^2}_{F} \cdot \underbrace{2x e^{x^2}}_g dx = \text{come prima senza passare da } y$$

Esempio 2 $\int x \cos^2 x dx$
F g

1° metodo: direttamente per parti, così devo fare la primitiva di $\cos^2 x$ e poi integrarla

2° metodo: $\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$, quindi $\cos^2 x = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$, da cui

$$\int x \cos^2 x dx = \frac{1}{2} \int (x + x \cos(2x)) dx = \frac{x^2}{4} + \frac{1}{2} \int \underbrace{x}_{F} \underbrace{\cos(2x)}_g dx =$$

$$= \frac{x^2}{4} + \frac{1}{2} \left\{ \underbrace{x \cdot \frac{1}{2} \sin(2x)}_{F G} - \int \underbrace{1 \cdot \frac{1}{2} \sin(2x)}_{f G} dx \right\}$$

$$= \frac{1}{4} x^2 + \frac{1}{4} x \sin(2x) - \frac{1}{4} \int \sin(2x) dx = \frac{1}{4} x^2 + \frac{1}{4} x \sin(2x) + \frac{1}{8} \cos(2x)$$

Esempio 3 $\int_0^4 \sqrt{|x-3|} dx$

Prima cosa da fare: spezzare le zone a seconda del segno di $x-3$.

Ora

$$|x-3| = \begin{cases} x-3 & \text{per } x \geq 3 \\ 3-x & \text{per } x \leq 3 \end{cases}$$

quindi

$$\int_0^4 \sqrt{|x-3|} dx = \int_0^3 \sqrt{3-x} + \int_3^4 \sqrt{x-3} dx$$

Calcolo le primitive: $\int \sqrt{x-3} dx = \frac{2}{3} (x-3)^{\frac{3}{2}}$

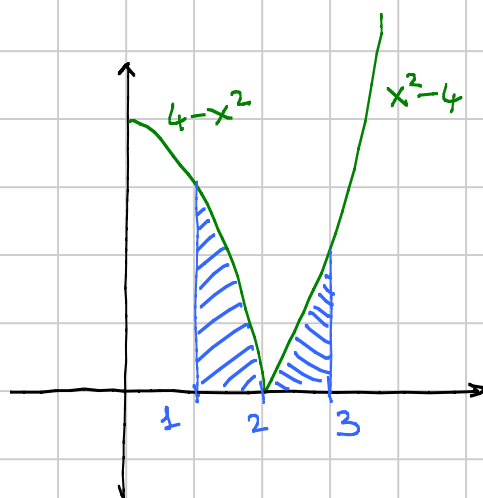
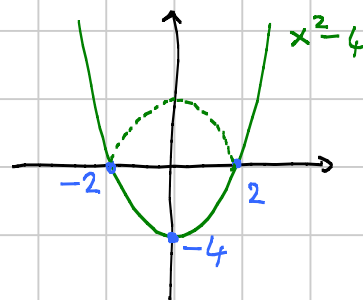
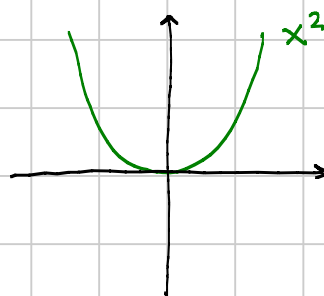
Se uno non lo vede pone $x-3=y$, da cui $dx=dy$, quindi

$$\int \sqrt{x-3} dx = \int \sqrt{y} dy = \int y^{\frac{1}{2}} dy = \frac{1}{1+\frac{1}{2}} y^{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} (x-3)^{\frac{3}{2}}$$

Altra primitiva: $\int \sqrt{3-x} dx = -\frac{2}{3} (3-x)^{\frac{3}{2}}$

Conclusione $\int_0^3 \sqrt{3-x} dx + \int_3^4 \sqrt{x-3} dx = \left[\frac{2}{3} (x-3)^{\frac{3}{2}} \right]_0^3 + \left[-\frac{2}{3} (3-x)^{\frac{3}{2}} \right]_3^4$

Esempio 4 $\int_1^3 |x^2-4| dx$



$$= \int_1^2 (4-x^2) dx + \int_2^3 (x^2-4) dx$$

Quello che abbiamo usato in realtà è che

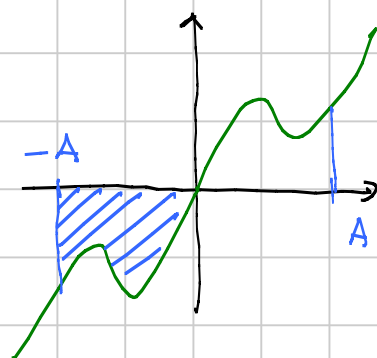
$$|x^2-4| = \begin{cases} x^2-4 & \text{per } x \leq -2 \text{ opp. } x \geq 2 \\ 4-x^2 & \text{per } -2 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

$$= \left[4x - \frac{1}{3} x^3 \right]_1^2 + \left[\frac{1}{3} x^3 - 4x \right]_2^3 = 8 - \frac{8}{3} - 4 + \frac{1}{3} + 9 - 12 - \frac{8}{3} + 8 = \dots$$

Osservazioni Integrali e simmetrie

* Sia $f(x)$ una funzione dispari. Allora:

$$\int_{-A}^0 f(x) dx = - \int_0^A f(x) dx \quad \forall A > 0$$



In particolare, se $f(x)$ è dispari abbiamo che

$$\int_{-A}^A f(x) dx = 0 \quad (\text{integrale di funzione dispari su intervallo simmetrico rispetto all'origine})$$

* Se invece $f(x)$ è pari abbiamo che $\int_{-A}^0 f(x) dx = \int_0^A f(x) dx$ e quindi

$$\int_{-A}^A f(x) dx = 2 \int_0^A f(x) dx.$$

Esempio 5 $\int_0^{\pi/2} \cos^2 x dx$

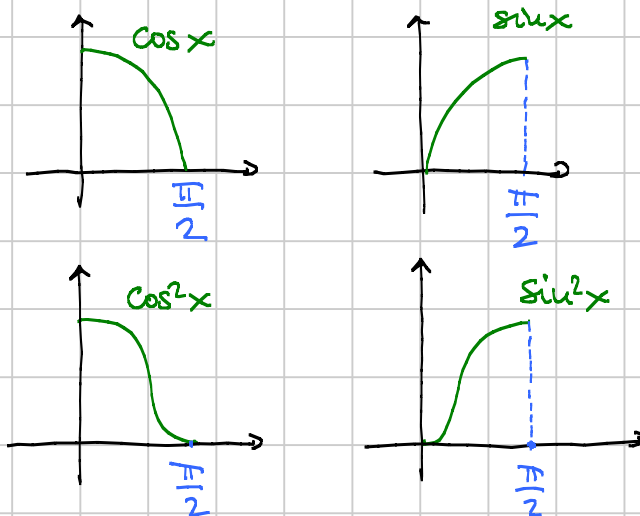
1° metodo: sfruttando la primitiva $= \left[\frac{x}{2} + \frac{1}{2} \sin x \cos x \right]_0^{\pi/2} =$

$$= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} - \frac{0}{2} - \frac{1}{2} \sin 0 \cos 0 = \frac{\pi}{4} = \text{metà della lunghezza dell'intervallo}$$

2° metodo: sfruttando la simmetria

Per simmetria abbiamo che

$$\int_0^{\pi/2} \cos^2 x dx = \int_0^{\pi/2} \sin^2 x dx$$



D'altra parte

$$\int_0^{\pi/2} \cos^2 x dx + \int_0^{\pi/2} \sin^2 x dx = \int_0^{\pi/2} (\cos^2 x + \sin^2 x) dx = \int_0^{\pi/2} 1 dx = \frac{\pi}{2}$$

Quindi $\int_0^{\pi/2} \cos^2 x dx$ e $\int_0^{\pi/2} \sin^2 x dx$ sono due numeri uguali che sommati danno $\frac{\pi}{2}$, quindi sono entrambi $\frac{\pi}{4}$.

Verifica dell'uguaglianza $\int_0^{\pi/2} \cos^2 x dx$ Pongo $y = \frac{\pi}{2} - x$, da cui $dy = -dx$

Cambio gli estremi: quando $x=0$ ho che $y = \frac{\pi}{2}$, quando $x = \frac{\pi}{2}$ ho che $y=0$.

Quindi con il cambio di variabili otteniamo

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \cos^2 x \, dx &= \int_{\pi/2}^0 \underbrace{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-y\right)}_x \underbrace{(-dy)}_{dx} = - \int_{\pi/2}^0 \cos^2\left(\frac{\pi}{2}-y\right) dy \\ &= - \int_{\pi/2}^0 \sin^2 y \, dy = \int_0^{\pi/2} \sin^2 y \, dy\end{aligned}$$

$\downarrow$
vso che $\cos(\frac{\pi}{2}-y) = \sin y$
PRECORSO !!

Oss. Se $[a, b]$ è un intervallo, si intende che

$$\int_b^a f(x) \, dx = - \int_a^b f(x) \, dx \quad (\text{coerente con il fatto che } [F(x)]_b^a = - [F(x)]_a^b)$$

$\uparrow$
estremi invertiti

Esempio 6 $\int \log(3x+4) \, dx$
 $= \frac{1}{3} [(3x+4) \log(3x+4) - (3x+4)]$

$$\int \log x \, dx = x \log x - x$$

Se uno non lo vede basta porre $y = 3x+4$, da cui $dy = 3 \, dx$

$$\int \log(3x+4) \, dx = \frac{1}{3} \int \underbrace{\log(3x+4)}_{\log y} \cdot \underbrace{3 \, dx}_{dy} = \frac{1}{3} \int \log y \, dy$$

$$= \frac{1}{3} (y \log y - y) = \frac{1}{3} ((3x+4) \log(3x+4) - (3x+4))$$