

Esempio 1 $\int \log(x^2-1) dx$

1° metodo: trucco dell'1 nascosto

$$\int \log(x^2-1) dx = \int \underset{g}{1} \cdot \underset{f}{\log(x^2-1)} dx = \underset{G}{x} \cdot \underset{F}{\log(x^2-1)} - \int \underset{G}{x} \cdot \underset{f}{\frac{1}{x^2-1}} \cdot 2x dx$$

$$= x \log(x^2-1) - 2 \int \boxed{\frac{x^2}{x^2-1}} dx$$

↑ funzione razionale (polinomio: polinomio)
e per queste c'è un metodo che vedremo.

2° metodo $\int \log(x^2-1) dx = \int \log[(x+1)(x-1)] dx$

$$= \int \log(x+1) dx + \int \log(x-1) dx \quad \text{entrambi si fanno per sostituzione}$$

$$\int \log(x+1) dx \quad \text{pongo } y = x+1, \text{ da cui } \frac{dy}{dx} = 1, \text{ quindi } dy = dx$$

$$= \int \log y dy = y \log y - y = (x+1) \log(x+1) - (x+1)$$

Analogamente $\int \log(x-1) dx = (x-1) \log(x-1) - (x-1)$.

Mettenendo insieme:

$$\begin{aligned} \int \log(x^2-1) dx &= (x+1) \log(x+1) - (x+1) + (x-1) \log(x-1) - (x-1) \\ &= \text{si possono fare varie semplificazioni o raccoglimenti.} \end{aligned}$$

Esempio 2 $\int \log(x^2+1) dx$ non funziona la scomposizione, ma resta solo l'1 nascosto

$$\int \underset{g}{1} \cdot \underset{f}{\log(x^2+1)} dx = \underset{G}{x} \cdot \underset{F}{\log(x^2+1)} - \int \underset{G}{x} \cdot \underset{f}{\frac{1}{x^2+1}} \cdot 2x dx$$

$$= x \cdot \log(x^2+1) - 2 \int \frac{x^2}{x^2+1} dx = x \cdot \log(x^2+1) - 2 \int \frac{x^2+1-1}{x^2+1} dx$$

$$= x \cdot \log(x^2+1) - 2 \int \left\{ 1 - \frac{1}{x^2+1} \right\} dx = x \cdot \log(x^2+1) - 2x + 2 \arctan x$$

Esempio 3 $\int \frac{x}{x^4+1} dx$ $\int \frac{x^2}{x^4+1} dx$ $\int \frac{x^3}{x^4+1} dx$

$$\int \frac{x^3}{x^4+1} dx = \frac{1}{4} \int \frac{4x^3}{x^4+1} dx = \frac{1}{4} \log(x^4+1) = \log \sqrt[4]{x^4+1}$$

↑
volendo $y = x^4+1$

$$\int \frac{x}{x^4+1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^4+1} dx \quad \text{Pongo } y = x^2, \text{ da cui } \frac{dy}{dx} = 2x, \text{ da cui } dy = 2x dx$$

$$= \frac{1}{2} \int \underbrace{\frac{1}{x^4+1}}_{\frac{1}{1+y^2}} \cdot \underbrace{2x dx}_{dy} = \frac{1}{2} \int \frac{1}{1+y^2} dy = \frac{1}{2} \arctan y = \frac{1}{2} \arctan(x^2)$$

$$\int \frac{x^2}{x^4+1} dx = \text{molto delicato.}$$

Esempio 4 $\int \frac{1}{2+x^2} dx = \int \frac{1}{2(1+\frac{x^2}{2})} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{1+(\frac{x}{\sqrt{2}})^2} dx$

Pongo $y = \frac{x}{\sqrt{2}}$, da cui $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, da cui $dy = \frac{1}{\sqrt{2}} dx$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{1}{1+(\frac{x}{\sqrt{2}})^2} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} dx}_{dy} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{1}{1+y^2} dy = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan y = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{x}{\sqrt{2}}$$

Allo stesso modo si dimostra che

$$\boxed{\int \frac{1}{a+x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{a}} \arctan \frac{x}{\sqrt{a}}}$$

Vera $\forall a > 0$

Esempio 5 $\int \frac{3x+2}{x^2+1} dx = \int \frac{3x}{x^2+1} dx + \int \frac{2}{x^2+1} dx$

$$= \frac{3}{2} \int \frac{2x}{x^2+1} dx + 2 \int \frac{1}{x^2+1} dx = \frac{3}{2} \log(x^2+1) + 2 \arctan x$$

Esempio 6 $\int \frac{3x+2}{x^2+2x+2} dx$ La derivata del denominatore è $2x+2$, quindi x e termine noto hanno lo stesso coefficiente

$$\begin{aligned}
 &= \int \frac{3x+3-1}{x^2+2x+2} dx = \int \frac{3x+3}{x^2+2x+2} dx - \int \frac{1}{x^2+2x+2} dx \\
 &= \frac{3}{2} \int \frac{2x+2}{x^2+2x+2} dx - \int \frac{1}{1+(x+1)^2} dx \\
 &= \frac{3}{2} \log(x^2+2x+2) - \arctan(x+1)
 \end{aligned}$$

Esempio 7 $\int \sqrt{1-x^2} dx$ Pongo $x = \sin y$, quindi $\frac{dx}{dy} = \cos y$, quindi $dx = \cos y dy$

$$\begin{aligned}
 &= \int \underbrace{\sqrt{1-\sin^2 y}}_{\sqrt{1-x^2}} \cdot \underbrace{\cos y dy}_{dx} = \int \cos^2 y dy = \frac{y}{2} + \frac{1}{2} \cos y \sin y \\
 &\quad \text{fatto per parti} \\
 &\quad \text{o con } \cos(2y)
 \end{aligned}$$

Ora devo tornare in x : $y \rightsquigarrow \arcsin x$, $\sin y \rightsquigarrow x$
 $\cos y \rightsquigarrow \sqrt{1-\sin^2 y} = \sqrt{1-x^2}$

Quindi $\frac{1}{2} y + \frac{1}{2} \cos y \cdot \sin y = \frac{1}{2} \arcsin x + \frac{1}{2} x \sqrt{1-x^2} = \int \sqrt{1-x^2} dx$

Oss. Abbiamo usato allegramente formule del tipo $\cos y = \sqrt{1-\sin^2 y}$, senza alcuna cautela sui segni

Verifica: $\left[\frac{1}{2} \arcsin x + \frac{1}{2} x \sqrt{1-x^2} \right]' = \dots$

Esempio 8 $\int \cos(\log x) dx$ Pongo $y = \log x$, $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$, $dy = \frac{1}{x} dx$

$$= \int \underbrace{x}_{e^y} \cdot \underbrace{\cos(\log x)}_{\cos y} \cdot \underbrace{\frac{1}{x} dx}_{dy} = \int e^y \cdot \cos y dy$$

$$\int \underset{\text{F}}{e^y} \underset{\text{g}}{\cos y} dy = \underset{\text{F}}{e^y} \underset{\text{G}}{\sin y} - \int \underset{\text{F}}{e^y} \underset{\text{G}}{\sin y} dy$$

$$= e^y \sin y - \int \underset{\text{F}}{e^y} \underset{\text{g}}{\sin y} dy = e^y \sin y - \left\{ \underset{\text{F}}{e^y} \underset{\text{G}}{(-\cos y)} - \int \underset{\text{F}}{e^y} \underset{\text{G}}{(-\cos y)} dy \right\}$$

$$= e^y \sin y + e^y \cos y - \underbrace{\int e^y \cos y dy}_{\text{grande ritorno}}$$

$$2 \int e^y \cos y dy = e^y \sin y + e^y \cos y.$$

Tornando all' integrale iniziale:

$$\int \cos(\log x) dx = \int e^y \cos y dy = \frac{1}{2} e^y \sin y + \frac{1}{2} e^y \cos y$$

$$\boxed{y = \log x} = \frac{1}{2} x \sin(\log x) + \frac{1}{2} x \cos(\log x)$$

$$= \frac{1}{2} x (\sin(\log x) + \cos(\log x))$$

— 0 — 0 —