

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 074

Titolo nota

18/11/2011

INTEGRAZIONE PER SOSTITUZIONE

Punto di partenza: $\int_a^b \Phi'(x) dx = [\Phi(x)]_a^b = \Phi(b) - \Phi(a)$

Uso la formula con $\Phi(x) = F(G(x))$. Allora, ponendo come sempre $F'(x) = f(x)$ e $G'(x) = g(x)$, avremo che

$$\Phi'(x) = F'(G(x)) G'(x) = f(G(x)) g(x)$$

Allora

$$\begin{aligned} \int_a^b f(G(x)) g(x) dx &= F(G(b)) - F(G(a)) = [F(x)]_{G(a)}^{G(b)} \\ &= \int_{G(a)}^{G(b)} F'(x) dx = \int_{G(a)}^{G(b)} f(x) dx \end{aligned}$$

Riassumendo

$$\int_a^b f(G(x)) g(x) dx = \int_{G(a)}^{G(b)} f(x) dx$$

Formula di integrazione per sostituzione

Interpretazione brutale: devo calcolare

$$\int_a^b f(G(x)) g(x) dx \quad \text{Pongo } y = G(x)$$

Ora x varia tra a e b . Quando $x=a$ ho che $y=G(a)$. Quando $x=b$ ho che $y=G(b)$. Con la sostituzione $f(G(x))$ diventa $f(y)$. Come sono legati dx e dy ?

$$\frac{dy}{dx} = \text{derivata di } y \text{ rispetto ad } x = G'(x) = g(x)$$

Ritornando dx a destra abbiamo che $dy = g(x) dx$, quindi

$$\int_a^b \underbrace{f(G(x))}_{f(y)} \underbrace{g(x) dx}_{dy} = \int_{G(a)}^{G(b)} f(y) dy$$

Esempio 1 $\int x \sin(x^2) dx = \frac{1}{2} \int 2x \sin(x^2) dx$

Pongo $x^2 = y$, quindi $\frac{dy}{dx} = 2x$, da cui $dy = 2x dx$

$$= \frac{1}{2} \int \underbrace{\sin(x^2)}_{\sin y} \cdot \underbrace{2x dx}_{dy} = \frac{1}{2} \int \sin y dy = -\frac{1}{2} \cos y = -\frac{1}{2} \cos(x^2)$$

$\uparrow$
torneo in x

Verifica: $[-\frac{1}{2} \cos(x^2)]' = -\frac{1}{2} (-\sin(x^2)) \cdot 2x = x \sin(x^2)$

Esempio 2 $\int x^2 e^{-x^3} dx = \frac{1}{3} \int 3x^2 e^{-x^3} dx$

Pongo $y = x^3$, quindi $\frac{dy}{dx} = 3x^2$, quindi $dy = 3x^2 dx$

$$= \frac{1}{3} \int \underbrace{e^{-x^3}}_{e^{-y}} \cdot \underbrace{3x^2 dx}_{dy} = \frac{1}{3} \int e^{-y} dy = -\frac{1}{3} e^{-y} = -\frac{1}{3} e^{-x^3}$$

$\uparrow$
 $y = x^3$

Esempio 3 $\int \cos x \cdot 7^{\sin x} dx =$

Pongo $y = \sin x$, quindi $\frac{dy}{dx} = \cos x$, quindi $dy = \cos x \cdot dx$

$$= \int \underbrace{7^{\sin x}}_{7^y} \cdot \underbrace{\cos x dx}_{dy} = \int 7^y dy = \frac{1}{\log 7} \cdot 7^y = \frac{1}{\log 7} \cdot 7^{\sin x}$$

Esempio 4 $\int \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} dx$

Pongo $y = 1+x^2$, da cui $\frac{dy}{dx} = 2x$, quindi $dy = 2x dx$

$$= \frac{1}{2} \int \underbrace{\frac{1}{1+x^2}}_{\frac{1}{y}} \cdot \underbrace{2x dx}_{dy} = \frac{1}{2} \int \frac{1}{y} dy = \frac{1}{2} \log |y| = \frac{1}{2} \log |1+x^2|$$

$$= \frac{1}{2} \log (1+x^2) = \log \sqrt{1+x^2}$$

Esempio 5 $\int \frac{1}{x \log^2 x} dx =$

Pongo $y = \log x$, da cui $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$, quindi $dy = \frac{1}{x} dx$

$$= \int \frac{1}{\log^2 x} \cdot \underbrace{\frac{1}{x} dx}_{dy} = \int \frac{1}{y^2} dy = -\frac{1}{y} = -\frac{1}{\log x}$$

Esempio 6 $\int \frac{\log^7 x}{x} dx$ $y = \log x, \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}, dy = \frac{1}{x} dx$

$$= \int \log^7 x \cdot \frac{1}{x} dx = \int y^7 dy = \frac{1}{8} y^8 = \frac{1}{8} \log^8 x$$

Esempio 7 $\int \frac{1}{x \log x} dx$ $y = \log x, \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}, dy = \frac{1}{x} dx$

$$= \int \underbrace{\frac{1}{\log x}}_{\frac{1}{y}} \cdot \underbrace{\frac{1}{x} dx}_{dy} = \int \frac{1}{y} dy = \log |y| = \log |\log x|$$

Esempio 8 $\int \log^3 x dx = \int \underset{g}{1} \cdot \underset{F}{\log^3 x} dx \stackrel{\text{per parti}}{=} \underset{G}{x} \cdot \underset{F}{\log^3 x} - \int \underset{G}{x} \cdot \underset{F}{3 \log^2 x} \cdot \underset{F}{\frac{1}{x}} dx$

$$= x \log^3 x - 3 \int \underset{g}{1} \cdot \underset{F}{\log^2 x} dx = x \log^3 x - 3 \left\{ \underset{G}{x} \log^2 x - \int \underset{G}{x} \cdot \underset{F}{2 \log x} \cdot \underset{F}{\frac{1}{x}} dx \right\}$$

$$= x \log^3 x - 3 x \log^2 x + 6 \int \log x dx = x \log^3 x - 3 x \log^2 x + 6 x \log x - 6 x$$

Esempio 9 $\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx$

Pongo $y = \cos x$, da cui $\frac{dy}{dx} = -\sin x$, quindi $dy = -\sin x dx$

$$= - \int \underbrace{\frac{1}{\cos x}}_{\frac{1}{y}} \underbrace{(-\sin x) dx}_{dy} = - \int \frac{1}{y} dy = -\log |y| = -\log |\cos x|$$

$$= \log \frac{1}{|\cos x|}$$

Esempio 10 $\int \cos^5 x \, dx$

1° metodo: per parti scrivendo $\cos^5 x = \cos x \cdot \cos^4 x$ e poi percorso +
g F

grande ritorno: ad ogni passaggio l'esponente scende di 2.

2° metodo: per sostituzione

$$\int \cos^5 x \, dx = \int \cos x \cdot \cos^4 x \, dx = \int \cos x \cdot (1 - \sin^2 x)^2 \, dx$$

ho usato
 $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

Pongo $y = \sin x$, da cui $\frac{dy}{dx} = \cos x$, da cui $dy = \cos x \cdot dx$

$$= \int (1 - \sin^2 x)^2 \cdot \cos x \, dx = \int (1 - y^2)^2 \, dy = \int (1 - 2y^2 + y^4) \, dy =$$

$$= y - \frac{2}{3} y^3 + \frac{1}{5} y^5 = \sin x - \frac{2}{3} \sin^3 x + \frac{1}{5} \sin^5 x$$

Confrontare i risultati ottenuti per parti e per sostituzione.

Con la stessa tecnica si fanno tutte le primitive del tipo

$$\int \sin^k x \, dx$$

$$\int \cos^k x \, dx$$

con k dispari

(metodo alternativo all'integrazione per parti)

Oss, la tecnica funziona anche con k negativo, purché dispari.